01.07.2019
PD Dr. Peer Kunstmann
M.Sc. Michael Ullmann

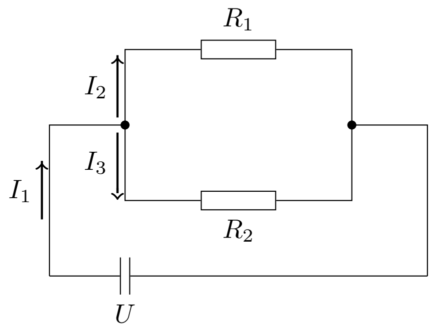
Karlsruhe Institute of Technology

Numerische Methoden

Lösungsvorschläge zum 6. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Nochmal etwas zu Fehlerabschätzung und Kondition)

Wir betrachten den folgenden Stromkreis



mit Stromstärken I_1, I_2 und I_3, einer anliegenden Spannung U und den Widerständen R_1 und R_2. Welche Zusammenhänge zwischen diesen Größen lassen sich aufstellen? Der Hersteller macht folgende Angaben:

$$R_1 = 2\Omega,\ R_2 = 4\Omega \text{ und } U = 20\text{V}.$$

Weiter garantiert der Hersteller folgende maximale Schwankungen:

- Beim Widerstand R_1: $0,01\Omega$.
- Beim Widerstand R_2: $0,04\Omega$.
- Bei der Spannung U: $0,1$V.

Geben Sie eine Schranke für den relativen Fehler von der Stromstärke $I = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}$ an (bzgl. der Norm $\|\cdot\|_\infty$). Was können Sie über den absoluten Fehler $\|\Delta I\|_\infty$ aussagen?

Lösung von Aufgabe 1

Zusammenhänge:
Nach der Erhaltung der Stromstärke gilt:

$$I_1 = I_2 + I_3 \ \Leftrightarrow\ I_1 - I_2 - I_3 = 0.$$

Weiter gilt nach dem Ohmschen Gesetz $U = R \cdot I$:

$$R_1 \cdot I_2 = U \text{ und } R_2 \cdot I_3 = U.$$

Wir setzen noch

$$I = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 0 \\ U \\ U \end{pmatrix},\ \text{und } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & R_1 & 0 \\ 0 & 0 & R_2 \end{pmatrix}.$$

Dann betrachten wir das ungestörte lineare Problem:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & R_1 & 0 \\ 0 & 0 & R_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = AI = \begin{pmatrix} 0 \\ U \\ U \end{pmatrix}.$$

Fehlerbetrachtung:
Laut Aufgabenstellung waren die folgenden Größen gegeben:

$$R_1 = 2\Omega,\ R_2 = 4\Omega,\ U = 20\text{V},$$
$$|\Delta R_1| \leq 0.01\Omega,\ |\Delta R_2| \leq 0.04\Omega \text{ und } |\Delta U| \leq 0.1\text{V}.$$

Dies liefert nun (der Übersicht wegen lassen wir die Einheiten von nun an weg):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},\ \Delta A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta R_1 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta R_2 \end{pmatrix} \text{ und } \Delta b = \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta U \\ \Delta U \end{pmatrix}.$$

Die inverse Matrix A^{-1} der Matrix A berechnen wir über

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{|l} \\ \cdot\frac{1}{2} \\ \cdot\frac{1}{4} \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right) \begin{array}{l} + \quad + \\ \cdot 1 \\ \quad\ \cdot 1 \end{array}$$
$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$
$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen nun alles, was wir für die Fehlerabschätzung benötigen:

$$\begin{aligned}
\|A\|_\infty &= \max_{i=1,2,3} \left[|A_{i1}| + |A_{i2}| + |A_{i3}|\right] = \max\{1+1+1,\ 0+2+0,\ 0+0+4\} = \max\{3,\ 2,\ 4\} = 4, \\
\left\|A^{-1}\right\|_\infty &= \max_{i=1,2,3} \left[\left|\left(A^{-1}\right)_{i1}\right| + \left|\left(A^{-1}\right)_{i2}\right| + \left|\left(A^{-1}\right)_{i3}\right|\right] = \max\left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4},\ 0 + \frac{1}{2} + 0,\ 0 + 0 + \frac{1}{4}\right\} \\
&= \max\left\{\frac{4+2+1}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right\} = \max\left\{\frac{7}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right\} = \frac{7}{4}, \\
\|b\|_\infty &= \max_{i=1,2,3} |b_i| = \max\{0,\ 20,\ 20\} = 20, \\
\|\Delta b\|_\infty &= \max_{i=1,2,3} \left|(\Delta b)_i\right| = \max\{0,\ |\Delta U|,\ |\Delta U|\} = |\Delta U| \leq 0.1, \\
\|\Delta A\|_\infty &= \max_{i=1,2,3} \left[\left|(\Delta A)_{i1}\right| + \left|(\Delta A)_{i2}\right| + \left|(\Delta A)_{i3}\right|\right] = \max\{|\Delta R_1|,\ |\Delta R_2|\} \leq \max\{0.01,\ 0.04\} = 0.04.
\end{aligned}$$

Die Kondition der Matrix A lässt sich nun noch berechnen über

$$\kappa_\infty(A) := \text{cond}_\infty(A) := \text{cond}_{\|\cdot\|_\infty}(A) = \|A\|_\infty \cdot \left\|A^{-1}\right\|_\infty = 4 \cdot \frac{7}{4} = 7.$$

Um die Fehlerabschätzung anwenden zu dürfen, benötigen wir, dass die Matrix A invertierbar ist, was oben gezeigt wurde (die inverse Matrix A^{-1} existiert) und die Bedingung $\left\|A^{-1}\right\|_\infty \|\Delta A\|_\infty < 1$ muss erfüllt sein, was wegen

$$\left\|A^{-1}\right\|_\infty \cdot \|\Delta A\|_\infty \leq \frac{7}{4} \cdot 0.04 = \frac{7}{4} \cdot \frac{4}{100} = \frac{7}{100} < 1$$

der Fall ist. Demnach gilt laut der bewiesenen Fehlerabschätzung aus der Vorlesung für den relativen Fehler $\frac{\|\Delta I\|_\infty}{\|I\|_\infty}$ des gestörten linearen Gleichungssystems

$$(A + \Delta A)(I + \Delta I) = b + \Delta b$$

gerade:

$$\begin{aligned}
\frac{\|\Delta I\|_\infty}{\|I\|_\infty} &\leq \frac{\kappa_\infty(A)}{1 - \kappa_\infty(A) \cdot \frac{\|\Delta A\|_\infty}{\|A\|_\infty}} \left(\frac{\|\Delta A\|_\infty}{\|A\|_\infty} + \frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty}\right) \leq \frac{7}{1 - \|A^{-1}\|_\infty \|\Delta A\|_\infty} \left(\frac{0.04}{4} + \frac{0,1}{20}\right) \\
&\leq \frac{7}{1 - \frac{7}{100}} \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{200}\right) = \frac{7}{\frac{93}{100}} \cdot \frac{2+1}{200} = \frac{700}{93} \cdot \frac{3}{200} = \frac{7}{2 \cdot 31} = \frac{7}{62}.
\end{aligned}$$

Um über den absoluten Fehler etwas aussagen zu können, müssen wir erstmal die exakte Lösung I des linearen Problems

$$AI = b$$

bestimmen. Es gilt:

$$AI = b \;\Leftrightarrow\; I = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+10+5 \\ 0+10+0 \\ 0+0+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Dadurch ergibt sich

$$\|I\|_\infty = \max_{i=1,2,3} |I_i| = \max\{15,\ 10,\ 5\} = 15.$$

Dann gilt für den absoluten Fehler $\|\Delta I\|_\infty$:

$$\|\Delta I\|_\infty = \frac{\|\Delta I\|_\infty}{\|I\|_\infty} \cdot \|I\|_\infty \leq \frac{7}{62} \cdot 15 = \frac{105}{62}.$$

Aufgabe 2 (Newton-Verfahren I)

Gegeben sei die Funktion $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} F_1(x_1, x_2) \\ F(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1^2 + 3x_2 \end{pmatrix} \quad \text{für } x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Jacobi-Matrix der Funktion F im Ursprung $x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ singulär ist.

(b) Führen Sie zwei Schritte des Newton-Verfahrens für $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ durch.

(c) Zeigen Sie, dass die Newton-Iteration zu F für jeden Startwert $x^{(0)} = \left(0, \varepsilon\right) \in \mathbb{R}^2$, mit $\varepsilon > 0$ beliebig klein, nicht durchführbar ist.

Lösung von Aufgabe 2

(a) Die Funktion F ist als Verkettung stetig differenzierbarer Funktionen wieder stetig differenzierbar mit der Ableitung

$$F'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{für alle Paare } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Weiter ist

$$F'(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$\det\left(F'(0,0)\right) = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 0 \cdot 3 - 0 \cdot 0 = 0 - 0 = 0,$$

d.h. die Matrix $F'(0,0)$ ist singulär, da sie nicht regulär ist. $\square$

(b) Die allgemeine Formel für die Newton-Iteration lautet (nach der Vorlesung):

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - F'\left(x^{(k)}\right)^{-1} F\left(x^{(k)}\right) \quad \text{für } k \in \mathbb{N}_0.$$

<u>$k = 0$</u>: Es ist

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir setzen dies ein und erhalten so

$$F'\left(x^{(0)}\right) = F'(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und } F\left(x^{(0)}\right) = F(1,1) = \begin{pmatrix} 1^2 + 1^2 \\ 1^2 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wir wollen über die Cramersche Regel die inverse Matrix zu $F'\left(x^{(0)}\right)$ bestimmen, dazu berechnen wir

$$\det\left(F'\left(x^{(0)}\right)\right) = \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 6 - 4 = 2 \neq 0.$$

Also bestimmen wir nach der Cramerschen Regel:

$$F'\left(x^{(0)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Demnach gilt für $x^{(1)}$ laut der obigen Formel zur Newton-Iteration:

$$\begin{aligned} x^{(1)} = x^{(0)} - F'\left(x^{(0)}\right)^{-1} F\left(x^{(0)}\right) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 - 4 \\ -2 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

<u>$k = 1$</u>: Es ist

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Wir setzen dies ein und erhalten so

$$F'\left(x^{(1)}\right) = F'(2,-1) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ und } F\left(x^{(1)}\right) = F(2,-1) = \begin{pmatrix} 2^2 + (-1)^2 \\ 2^2 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir wollen über die Cramersche Regel die inverse Matrix zu $F'\left(x^{(1)}\right)$ bestimmen, dazu berechnen wir

$$\det\left(F'\left(x^{(1)}\right)\right) = \det\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = 4 \cdot 3 - 4 \cdot (-2) = 12 + 8 = 20 \neq 0.$$

Also bestimmen wir nach der Cramerschen Regel:

$$F'\left(x^{(1)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Demnach gilt für $x^{(2)}$ laut der obigen Formel zur Newton-Iteration:

$$\begin{aligned} x^{(2)} &= x^{(1)} - F'\left(x^{(1)}\right)^{-1} F\left(x^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 15+2 \\ -20+4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 17 \\ -16 \end{pmatrix} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 40-17 \\ -20+16 \end{pmatrix} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 23 \\ -4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(c) Es gilt für alle $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} F(0,\varepsilon) &= \begin{pmatrix} 0^2 + \varepsilon^2 \\ 0^2 + 3\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 \\ 3\varepsilon \end{pmatrix}, \\ F'(0,\varepsilon) &= \begin{pmatrix} 0 & 2\varepsilon \\ 0 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Also ist die Matrix $F'(0,\varepsilon)$ singulär, da z.B.

$$\det\left(F'(0,\varepsilon)\right) = \det\begin{pmatrix} 0 & 2\varepsilon \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 0 \cdot 3 - 0 \cdot 2\varepsilon = 0 - 0 = 0$$

ist für alle $\varepsilon > 0$. Demnach ist der erste Schritt der Newton-Iteration nicht durchführbar. $\square$

Aufgabe 3 (Approximation der Wurzel)

Bestimmen Sie mit Hilfe des Newton-Verfahrens die reelle Zahl $\sqrt{17}$ bis auf fünf Nachkommastellen genau. Begründen Sie dabei die Wahl ihres Startwertes $x^{(0)}$.

Lösung von Aufgabe 3

Setze die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 - 17.$$

Die Funktion f ist eine glatte Funktion auf ganz $\mathbb{R}$, da z.B. die Funktion f ein Polynom zweiten Grades ist, insbesondere ist die Funktion f somit zweimal stetig differenzierbar mit den Ableitungen

$$f'(x) = 2x \text{ und } f''(x) = 2 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Da die Funktion f ein Polynom zweiten Grades ist, hat die Funktion f höchstens zwei Nullstellen x^* und y^* in $\mathbb{R}$. Es gilt:

$$f(4) = 4^2 - 17 = 16 - 17 = -1 < 0 \text{ und } f(5) = 5^2 - 17 = 25 - 17 = 8 > 0.$$

Also folgt nach dem Zwischenwertsatz (oder nach dem Nullstellensatz von Bolzano), dass die Nullstelle x^* der Funktion f im Intervall $(4,5)$ liegen muss und es gilt:

$$0 = f\left((x^*)^2\right) = (x^*)^2 - 17 \ \Leftrightarrow\ (x^*)^2 = 17,$$

d.h. $x^* = \sqrt{17}$, da $x^* \in (4,5) \subseteq (0,\infty)$ ist. Durch Faktorisierung sehen wir nun

$$f(x) = x^2 - 17 = (x - x^*)(x + x^*) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Demnach ist

$$f(-x^*) = (-x^* - x^*)(-x^* + x^*) = -2x^* \cdot 0 = 0,$$

und $-x^* \in (-5,-4)$, d.h. $y^* = -x^* = -\sqrt{17}$. Also ist x^* die einzige Nullstelle im Intervall $(4,5)$. Wir prüfen noch die Zwischenstelle $x = 4.5$:

$$f(4.5) = 4.5^2 - 17 = 20.25 - 17 = 3.25 > 0,$$

dies liefert:

$$x^* \in (4, 4.5).$$

Wir setzen $\alpha = 8$ und $\beta = 2$, so gilt:

$$\begin{aligned} |f'(x)| &= 2\,|x| \geq 2 \cdot 4 = 8 = \alpha > 0, \\ |f''(x)| &= 2 \leq \beta, \\ \frac{\beta}{2\alpha} &= \frac{2}{2 \cdot 8} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

für alle $x \in [4, 4.5]$ ($\delta_1 := \sqrt{17} - 4,\ \delta_2 := 4.5 - \sqrt{17} > 0$). Wir haben für die Newton-Iteration (laut Vorlesung, Fall $n = 1$):

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f\left(x^{(k)}\right)}{f'\left(x^{(k)}\right)} = x^{(k)} - \frac{\left(x^{(k)}\right)^2 - 17}{2x^{(k)}} = \frac{2\left(x^{(k)}\right) - \left(x^{(k)}\right)^2 + 17}{2x^{(k)}} = \frac{\left(x^{(k)}\right)^2 + 17}{2x^{(k)}} \text{ für } k \in \mathbb{N}_0.$$

Setzen wir nun noch

$$x^{(0)} = 4 \in [4, 4.5].$$

Wie viele Schritte sind nötig?
Dazu betrachte die Fehlerabschätzung (aus der Vorlesung, Fall $n = 1$):

$$\left|x^* - x^{(0)}\right| = |x^* - 4| \leq \frac{1}{2} < \frac{1}{10^0} \text{ auf 0 Nachkommastellen genau,}$$

$$\left|x^* - x^{(1)}\right| \leq \frac{\beta}{2\alpha}\left|x^* - x^{(0)}\right|^2 = \frac{1}{8}\left|x^* - x^{(0)}\right|^2 \leq \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{32} < \frac{1}{10^1} \text{ auf 1 Nachkommastelle genau,}$$

$$\left|x^* - x^{(2)}\right| \leq \frac{\beta}{2\alpha}\left|x^* - x^{(1)}\right|^2 = \frac{1}{8}\left|x^* - x^{(1)}\right|^2 \leq \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{32}\right)^2 = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{1024} = \frac{1}{8192} < \frac{1}{10^3} \text{ auf 3 Nachkommastellen genau,}$$

$$\left|x^* - x^{(3)}\right| \leq \frac{\beta}{2\alpha}\left|x^* - x^{(2)}\right|^2 = \frac{1}{8}\left|x^* - x^{(2)}\right|^2 \leq \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{8192}\right)^2 = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{67108864} = \frac{1}{536870912} < \frac{1}{10^8}$$

auf 8 Nachkommastellen genau.

Also benötigen wir höchstens drei Schritte der Newton-Iteration.
Die Newton-Iteration: Wir berechnen laut der obigen Vorschrift (das unterstrichene ist stets das, was sich zur vorherigen Approximation nicht ändert):

$$\begin{aligned}
x^{(0)} &= 4,\\
x^{(1)} &= \frac{4^2+17}{2\cdot 4} = \frac{16+17}{8} = \frac{33}{8} = \underline{4}.125,\\
x^{(2)} &= \frac{\left(\frac{33}{8}\right)^2+17}{2\cdot\frac{33}{8}} = \frac{\frac{1089}{64}+\frac{1088}{64}}{\frac{33}{4}} = \frac{\frac{2177}{64}}{\frac{33}{4}} = \frac{2177}{64}\cdot\frac{4}{33} = \frac{2177}{528} \approx \underline{4.12}310606061,\\
x^{(3)} &= \frac{\left(\frac{2177}{528}\right)^2+17}{2\cdot\frac{2177}{528}} = \frac{\frac{4739329}{278784}+\frac{4739328}{278784}}{\frac{2177}{264}} = \frac{\frac{9478657}{278784}}{\frac{2177}{264}} = \frac{9478657}{278784}\cdot\frac{264}{2177} = \frac{9478657}{2298912} \approx \underline{4.12310}562562.
\end{aligned}$$

Also lautet die Approximation von $\sqrt{17}$ auf fünf Nachkommastellen genau (sogar hier auf acht Nachkommastellen genau):

$$\sqrt{17} \approx \underline{4.12310}562.$$

□

Aufgabe 4 (Nullstellenbestimmung)

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = x - \mathrm{e}^{-x} - 1 \text{ für } x \in \mathbb{R}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion f genau eine Nullstelle x^* auf ganz $\mathbb{R}$ besitzt und schränken Sie diese Nullstelle auf ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ der Länge $\frac{1}{\mathrm{e}}$ ein.

(b) Führen Sie einen Schritt des Newton-Verfahrens durch, wählen Sie dabei ihren Startwert $x^{(0)}$ aus dem Intervall I.

(c) Beweisen Sie nun die Abschätzung für die Iterationsschritte $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ der Newton-Iteration:

$$\left|x^* - x^{(k+1)}\right| \leq \frac{1}{2^{2k+1}\left(\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}}}\right)^{2k+1}\mathrm{e}^2} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0,$$

wobei wir mit $x^* \in \mathbb{R}$ die Nullstelle der Funktion f bezeichnen. Begründen Sie nun weiter, warum die Newton-Iteration in diesem Falle konvergiert.

Lösung von Aufgabe 4

(a) Die Funktion f ist als Verkettung glatter Funktionen wieder glatt, also insbesondere zweimal stetig differenzierbar mit Ableitungen

$$f'(x) = 1 + \mathrm{e}^{-x},$$
$$f''(x) = -\mathrm{e}^{-x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Es gilt:

$$f(1) = 1 - \mathrm{e}^{-1} - 1 = -\frac{1}{\mathrm{e}} < 0 \text{ und } f(2) = 2 - \mathrm{e}^{-2} - 1 = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}^2} \geq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} > 0,$$

da die Eulersche Zahl $\mathrm{e} > 2$ ist. Nach dem Zwischenwertsatz (oder Nullstellensatz von Bolzano) gibt es eine Stelle $x^* \in (1, 2)$ mit $f(x^*) = 0$. Weiter ist die Funktion f streng monoton wachsend wegen

$$f'(x) = 1 + \mathrm{e}^{-x} \geq 1 > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R},$$

damit ist die Funktion f insbesondere injektiv, d.h.

$$f^{-1}(\{0\}) = \{x^*\},$$

also ist x^* die einzige Nullstelle der Funktion f auf ganz $\mathbb{R}$. Wir überprüfen noch den Wert $x = 1 + \frac{1}{\mathrm{e}}$:

$$f\left(1 + \frac{1}{\mathrm{e}}\right) = 1 + \frac{1}{\mathrm{e}} - \mathrm{e}^{-1-\frac{1}{\mathrm{e}}} - 1 = \frac{1}{\mathrm{e}} - \frac{1}{\mathrm{e}\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}} = \frac{1}{\mathrm{e}}\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}}\right) \geq \frac{1}{\mathrm{e}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) > 0,$$

da die Eulersche Zahl $\mathrm{e} \in (2, 3)$ ist. Also folgt wieder nach dem Zwischenwertsatz (oder dem Nullstellensatz von Bolzano), sowie der Eindeutigkeit der Nullstelle, dass

$$x^* \in \left(1,\ 1 + \frac{1}{\mathrm{e}}\right) =: I.$$

Das Intervall I hat somit die Länge $\frac{1}{\mathrm{e}}$. $\square$

(b) Wir haben für die Newton-Iteration (laut Vorlesung, Fall $n = 1$):

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= x^{(k)} - \frac{f\left(x^{(k)}\right)}{f'\left(x^{(k)}\right)} = x^{(k)} - \frac{x^{(k)} - \mathrm{e}^{-x^{(k)}} - 1}{1 + \mathrm{e}^{-x^{(k)}}} = \frac{x^{(k)} + x^{(k)}\mathrm{e}^{-x^{(k)}} - x^{(k)} + \mathrm{e}^{-x^{(k)}} + 1}{1 + \mathrm{e}^{-x^{(k)}}} \\ &= \frac{\left(x^{(k)} + 1\right)\mathrm{e}^{-x^{(k)}} + 1}{1 + \mathrm{e}^{-x^{(k)}}} \end{aligned}$$

für $k \in \mathbb{N}_0$.

<u>$k = 0$</u>: Setze $x^{(0)} = 1 \in \left[1,\ 1 + \frac{1}{\mathrm{e}}\right]$. Dann gilt nach der obigen Vorschrift für die Newton-Iteration:

$$x^{(1)} = \frac{\left(x^{(0)} + 1\right)\mathrm{e}^{-x^{(0)}} + 1}{1 + \mathrm{e}^{-x^{(0)}}} = \frac{(1+1)\,\mathrm{e}^{-1} + 1}{1 + \mathrm{e}^{-1}} = \frac{\frac{2}{\mathrm{e}} + 1}{1 + \frac{1}{\mathrm{e}}} = \frac{\frac{2+\mathrm{e}}{\mathrm{e}}}{\frac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}}}$$

$$= \frac{2+\mathrm{e}}{\mathrm{e}} \cdot \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+1} = \frac{\mathrm{e}+2}{\mathrm{e}+1} = 1 + \frac{1}{\mathrm{e}+1} \approx 1.26894142137.$$

Demnach ist

$$x^{(1)} = 1 + \frac{1}{\mathrm{e}+1} \in \left(1,\ 1+\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = I.$$

(c) Setze

$$\alpha := 1 + \mathrm{e}^{-1-\frac{1}{\mathrm{e}}} = 1 + \mathrm{e}^{-1-\mathrm{e}^{-1}} \text{ und } \beta := \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}},$$

dann gilt für alle $x \in \left[1,\ 1+\frac{1}{\mathrm{e}}\right]$ (mit $\delta_1 := x^* - 1,\ \delta_2 := 1 + \frac{1}{\mathrm{e}} - x^* > 0$)

$$\begin{aligned} |f'(x)| &= \left|1 + \mathrm{e}^{-x}\right| = 1 + \mathrm{e}^{-x} \geq 1 + \mathrm{e}^{-1-\frac{1}{\mathrm{e}}} = \alpha > 0, \\ |f''(x)| &= \left|\mathrm{e}^{-x}\right| = \mathrm{e}^{-x} \leq \mathrm{e}^{-1} = \beta. \end{aligned}$$

Weiter ist

$$\frac{\beta}{2\alpha} = \frac{\mathrm{e}^{-1}}{2\left(1 + \frac{1}{\mathrm{e}\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}}\right)} = \frac{1}{2\left(\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}}}\right)}.$$

Weiter gilt:

$$\left|x^* - x^{(0)}\right| = |x^* - 1| \leq \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Beweis der Fehlerabschätzung: Wir zeigen per vollständiger Induktion

$$\left|x^* - x^{(k+1)}\right| \leq \frac{1}{2^{2k+1}\left(\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}}}\right)^{2k+1}\mathrm{e}^2} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

Induktionsanfang (I.A.): Es gilt für $k = 0$ laut der Fehlerabschätzung aus der Vorlesung im Fall $n = 1$:

$$\begin{aligned} \left|x^* - x^{(1)}\right| &\leq \frac{\beta}{2\alpha}\left|x^* - x^{(0)}\right|^2 = \frac{1}{2\left(\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}}}\right)}|x^* - 1|^2 \leq \frac{1}{2\left(\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}}}\right)\mathrm{e}^2} \\ &= \frac{1}{2^{2\cdot 0+1}\left(\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}}}\right)^{2\cdot 0+1}\mathrm{e}^2}. \end{aligned}$$

Damit stimmt die Aussage für $k = 0$.
Induktionsvoraussetzung (I.V.): Sei $k \in \mathbb{N}_0$ fest, aber beliebig und für dieses k gelte die Abschätzung

$$\left|x^* - x^{(k+1)}\right| \leq \frac{1}{2^{2k+1}\left(\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}}}\right)^{2k+1}\mathrm{e}^2}.$$

Induktionsschritt (I.S.): Wir zeigen nun die Aussage für $k+1$:

$$\begin{aligned} \left|x^* - x^{(k+2)}\right| &\leq \frac{\beta}{2\alpha}\left|x^* - x^{(k+1)}\right|^2 = \frac{1}{2\left(\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}}}\right)}\left|x^* - x^{(k+1)}\right|^2 \\ &\leq \frac{1}{2\left(\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}}}\right)}\left(\frac{1}{2^{2k+1}\left(\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}}}\right)^{2k+1}\mathrm{e}^2}\right)^2 \quad \text{nach (I.V.)} \\ &= \frac{1}{2\left(\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}}}\right)} \cdot \frac{1}{2^{4k+2}\left(\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}}}\right)^{4k+2}\mathrm{e}^4} \\ &= \frac{1}{2^{4k+3}\left(\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}}}\right)^{4k+3}\mathrm{e}^4} \\ &\leq \frac{1}{2^{2k+3}\left(\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}}}\right)^{2k+3}\mathrm{e}^2} = \frac{1}{2^{2(k+1)+1}\left(\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}}}\right)^{2(k+1)+1}\mathrm{e}^2}, \end{aligned}$$

da $2 > 1$, $\mathrm{e} > 1$ und $\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}}} > 1$ ist. Dies war zu zeigen. □

Beweis der Konvergenz: Es gilt wegen der Fehlerabschätzung:

$$\left|x^* - x^{(k+1)}\right| \leq \frac{1}{2^{2k+1}\left(\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}}}\right)^{2k+1}\mathrm{e}^2} \to 0 \text{ für } k \to \infty,$$

d.h.

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = \lim_{k\to\infty} x^{(k+1)} = x^*.$$

$\square$

Bemerkung: Alternativ wissen wir durch

$$\frac{2\alpha}{\beta} = 2\left(\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}}}\right)$$

und

$$\left|x^* - x^{(0)}\right| = |x^* - 1| \leq \frac{1}{\mathrm{e}} < 2\left(\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}}}\right) = \frac{2\alpha}{\beta},$$

dass nach der Vorlesung die Folge $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gegen die Nullstelle x^* für $k \to \infty$ konvergieren muss.