12.07.2019
PD Dr. Peer Kunstmann
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Numerische Methoden

7. Übungsblatt
(wird am Freitag, den 19.07.2019 besprochen)

Aufgabe 1 (Summierte Trapezregel)

Berechnen Sie mit der summierten Trapezregel das Integral

$$\int_0^1 \sqrt{1+\cos^2(x)}\mathrm{d}x$$

so, dass ein Fehler kleiner als 0.005 garantiert werden kann.
Hinweis: Nutzen Sie die Folgerung aus dem Additionstheorem

$$\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 2 (Quadraturformeln)

(a) Bestimmen Sie die Gewichte a_0, a_1 und a_2 in $\mathbb{R}$ so, dass die folgende Quadraturformel

$$\int_{-1}^1 g(x)\mathrm{d}x \approx a_0 g\left(-\frac{1}{2}\right) + a_1 g(0) + a_2 g(1)$$

für alle Polynome vom Grad kleiner oder gleich zwei exakt ist.

(b) Bestimmen Sie die Gewichte a_0 und a_1 in R sowie die Stützstellen x_0 und x_1 in $[0,1]$ so, dass die folgende Quadraturformel

$$\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x \approx g(0) + a_0 g(x_0) + a_1 g(x_1)$$

exakt ist für alle Polynome vom Grad kleiner oder gleich drei.

Aufgabe 3 (Maximale Exaktheit von Quadraturformeln)

In dieser Aufgabe stellen wir uns die Frage, wie exakt kann eine Quadraturformel maximal sein. Dazu sei $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$, sowie $x_0, \ldots, x_n \in [a,b]$, $n \in \mathbb{N}_0$, eine beliebige Unterteilung des Intervalls I, d.h. es gilt:

$$a \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leq b.$$

Wir setzen die Quadraturformel

$$Q(f) := \sum_{k=0}^n \omega_k f(x_k)$$

für stetige Funktionen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit Gewichten $\omega_0, \ldots, \omega_n \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Quadraturformel Q höchstens für alle Polynome bis zum Grad $2n+1$ maximal sein kann, d.h. es gibt ein Polynom p vom Grad $2n+2$ so, dass

$$Q(p) \neq \int_a^b p(x)\mathrm{d}x$$

ist.

Aufgabe 4 (Fresnel-Integral mithilfe der Trapez- und Simpsonregel)

Gegeben sei das Fresnel-Integral

$$I := \int_0^\pi \sin^2(x)\mathrm{d}x.$$

(a) Berechnen Sie das Fresnel-Integral I.

(b) Nähern Sie das Fresnel-Integral I mit der Trapezregel, der summierten Trapezregel zur Schrittweite $h = \frac{\pi}{6}$ und der Simpsonregel an.

(c) Schätzen Sie für alle drei Näherungen den Fehler ab und vergleichen Sie die Abschätzungen mit dem wirklichen Fehler.

Bemerkung:
Einige Vorabinformationen bzeüglich der Klausur und der Anmeldung:

- Die **Klausur** zu dieser Lehrveranstaltung findet am **Freitag**, den **06.09.2019**, von 08.00 Uhr bis 10.00 Uhr statt.
- Die Bearbeitungsdauer der Klausur beträgt zwei Stunden.
- Der **Anmeldeschluss** für diese Klausur ist der Sonntag, der 18.08.2019.
- Eine Anmeldung zu einem späteren Zeitpunkt als der 18.08.2019 ist nicht möglich!
- Eine Abmeldung von dieser Klausur kann in der Regel bis einen Tag vor der Klausur online oder am Tag der Klausur persönlich vor Ort/ Hörsaal geschehen.
- Sollte es noch Fragen wegen der Klausur oder Schwierigkeiten beim Anmelden geben, so wenden Sie sich an Michael Ullmann.