12.07.2019
PD Dr. Peer Kunstmann
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Numerische Methoden

Lösungsvorschläge zum 7. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Summierte Trapezregel)

Berechnen Sie mit der summierten Trapezregel das Integral

$$\int_0^1 \sqrt{1+\cos^2(x)}\mathrm{d}x$$

so, dass ein Fehler kleiner als 0.005 garantiert werden kann.
Hinweis: Nutzen Sie die Folgerung aus dem Additionstheorem

$$\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Lösung von Aufgabe 1

Setze

$$I = \int_0^1 \sqrt{1+\cos^2(x)}\mathrm{d}x,\ a = 0,\ b = 1 \text{ und die Funktion } f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{1+\cos^2(x)}.$$

Die Funktion f ist zweimal stetig-differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$ mit den Ableitungen (nach Ketten- und Produktregel):

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{-2\sin(x)\cos(x)}{2\sqrt{1+\cos^2(x)}} = -\frac{\sin(x)\cos(x)}{\sqrt{1+\cos^2(x)}} = -\frac{\sin(2x)}{2\sqrt{1+\cos^2(x)}},\\
f''(x) &= -\frac{2\cos(2x)\cdot 2\sqrt{1+\cos^2(x)} - \sin(2x)\cdot \frac{2(-2\sin(x)\cos(x))}{2\sqrt{1+\cos^2(x)}}}{\left[2\sqrt{1+\cos^2(x)}\right]^2} = -\frac{4\cos(2x)\sqrt{1+\cos^2(x)} + \frac{2\sin(x)\cos(x)\sin(2x)}{\sqrt{1+\cos^2(x)}}}{4\left(1+\cos^2(x)\right)}\\
&= -\frac{4\cos(2x)\sqrt{1+\cos^2(x)}^2 + 2\cdot\frac{1}{2}\sin^2(2x)}{4\left(1+\cos^2(x)\right)\sqrt{1+\cos^2(x)}} = -\frac{4\cos(2x)\left(1+\cos^2(x)\right) + \sin^2(2x)}{4\left(1+\cos^2(x)\right)\sqrt{1+\cos^2(x)}}\\
&= \frac{-\cos(2x)}{\sqrt{1+\cos^2(x)}} - \frac{\sin^2(2x)}{4\left(1+\cos^2(x)\right)\sqrt{1+\cos^2(x)}}
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ laut der Folgerung aus dem Additionstheorem

$$\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Weiter erhalten wir laut der Dreiecks-Ungleichung und wegen der Beschränktheit der Sinus- und Cosinus-Funktion durch 1 gerade

$$\begin{aligned}
|f''(x)| &= \left|\frac{-\cos(2x)}{\sqrt{1+\cos^2(x)}} - \frac{\sin^2(2x)}{4\left(1+\cos^2(x)\right)\sqrt{1+\cos^2(x)}}\right| \le \left|\frac{-\cos(2x)}{\sqrt{1+\cos^2(x)}}\right| + \left|\frac{-\sin^2(2x)}{4\left(1+\cos^2(x)\right)\sqrt{1+\cos^2(x)}}\right|\\
&= \frac{|\cos(2x)|}{\sqrt{1+\cos^2(x)}} + \frac{\sin^2(2x)}{4\left(1+\cos^2(x)\right)\sqrt{1+\cos^2(x)}} \le \frac{1}{\sqrt{1+0}} + \frac{1}{4(1+0)\sqrt{1+0}} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{4+1}{4} = \frac{5}{4}
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit gilt für den Fehler $R_h(f)$ der summierten Trapezregel zur Schrittweite $h > 0$:

$$|R_h(f)| = \left|-\frac{(1-0)}{12}h^2 f''(\eta)\right| = \frac{h^2}{12}|f''(\eta)| \le \frac{h^2}{12}\cdot\frac{5}{4} = \frac{5}{48}h^2 < 0.005 = \frac{5}{1000} = \frac{1}{200}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \ h^2 &< \frac{48}{5 \cdot 200} = \frac{6}{125} \\
\Leftrightarrow \ 0 < h &< \sqrt{\frac{6}{125}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{125}} = \frac{\sqrt{6}}{5\sqrt{5}}.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\mathbb{N} \ni n = \frac{1-0}{h} = \frac{1}{h} > \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{125}{6}} = \sqrt{20 + \frac{5}{6}} > \sqrt{16} = 4.$$

Also wählen wir $n = 5 > 4$ und damit ist $h = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{5} = 0.2$. Nach der summierten Trapezregel zur Schrittweite $h = \frac{1}{5}$ gilt nun:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \sqrt{1 + \cos^2(x)} \mathrm{d}x = \int_0^1 f(x) \mathrm{d}x \\
&\approx \frac{h}{2} \left(f(0) + 2f(0+h) + 2f(0+2h) + 2f(0+3h) + 2f(0+4h) + f(1) \right) \\
&= \frac{1}{10} \left(f(0) + 2f\left(\frac{1}{5}\right) + 2f\left(\frac{2}{5}\right) + 2f\left(\frac{3}{5}\right) + 2f\left(\frac{4}{5}\right) + f(1) \right) \\
&= \frac{1}{10} \left(\sqrt{1 + \cos^2(0)} + 2\sqrt{1 + \cos^2\left(\frac{1}{5}\right)} + 2\sqrt{1 + \cos^2\left(\frac{2}{5}\right)} + 2\sqrt{1 + \cos^2\left(\frac{3}{5}\right)} + 2\sqrt{1 + \cos^2\left(\frac{4}{5}\right)} + \sqrt{1 + \cos^2(1)} \right) \\
&= \frac{1}{10} \left(\sqrt{1 + 1} + 2\sqrt{1 + \cos^2\left(\frac{1}{5}\right)} + 2\sqrt{1 + \cos^2\left(\frac{2}{5}\right)} + 2\sqrt{1 + \cos^2\left(\frac{3}{5}\right)} + 2\sqrt{1 + \cos^2\left(\frac{4}{5}\right)} + \sqrt{1 + \cos^2(1)} \right) \\
&= \frac{1}{10} \left(\sqrt{2} + 2\sqrt{1 + \cos^2\left(\frac{1}{5}\right)} + 2\sqrt{1 + \cos^2\left(\frac{2}{5}\right)} + 2\sqrt{1 + \cos^2\left(\frac{3}{5}\right)} + 2\sqrt{1 + \cos^2\left(\frac{4}{5}\right)} + \sqrt{1 + \cos^2(1)} \right) \\
&\approx 1.3101
\end{aligned}$$

und der Fehler zu I beträgt weniger als 0.005. □

Bemerkung: Genauer lautet das Integral

$$I \approx 1.31144.$$

Dieses Integral I ist aber <u>nicht</u> elementar berechenbar!

Aufgabe 2 (Quadraturformeln)

(a) Bestimmen Sie die Gewichte a_0, a_1 und a_2 in $\mathbb{R}$ so, dass die folgende Quadraturformel

$$\int_{-1}^{1} g(x)\mathrm{d}x \approx a_0 g\left(-\frac{1}{2}\right) + a_1 g(0) + a_2 g(1)$$

für alle Polynome vom Grad kleiner oder gleich zwei exakt ist.

(b) Bestimmen Sie die Gewichte a_0 und a_1 in R sowie die Stützstellen x_0 und x_1 in $[0,1]$ so, dass die folgende Quadraturformel

$$\int_{0}^{1} g(x)\mathrm{d}x \approx g(0) + a_0 g(x_0) + a_1 g(x_1)$$

exakt ist für alle Polynome vom Grad kleiner oder gleich drei.

Lösung von Aufgabe 2

(a) Setze

$$Q_a(g) := a_0 g\left(-\frac{1}{2}\right) + a_1 g(0) + a_2 g(1)$$

für stetige Funktionen $g\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$. Es soll gelten:

$$\int_{-1}^{1} p(x)\mathrm{d}x \overset{!}{=} Q_a(p) \text{ für alle Polynome } p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit Grad kleiner gleich 2.}$$

Aufgrund der Linearität des Integrals und der Funktion Q_a genügt es für uns die jeweiligen Monome p_0, p_1 und p_2 zu überprüfen. Wir erhalten somit aus der obigen Forderung:

$$p_0(x) = 1: \quad 2 = [1-(-1)] = [x]_{-1}^{1} = \int_{-1}^{1} 1\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} p_0(x)\mathrm{d}x \overset{!}{=} Q_a(p_0) = a_0 p_0\left(-\frac{1}{2}\right) + a_1 p_0(0) + a_2 p_0(1) = a_0 + a_1 + a_2,$$

$$p_1(x) = x: \quad 0 = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{1} = \int_{-1}^{1} x\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} p_1(x)\mathrm{d}x \overset{!}{=} Q_a(p_1) = -\frac{1}{2}a_0 + 0a_1 + a_2 \Leftrightarrow 0 = -a_0 + 2a_2$$

$$p_2(x) = x^2: \quad \frac{2}{3} = \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right] = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \int_{-1}^{1} x^2\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} p_2(x)\mathrm{d}x \overset{!}{=} Q_a(p_2) = \frac{1}{4}a_0 + 0a_1 + a_2 \Leftrightarrow 8 = 3a_0 + 12a_2$$

Damit erhalten wir folgendes lineares Gleichungssystem (kurz: LGS):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 + a_2 \\ -a_0 + 2a_2 \\ 3a_0 + 12a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 12 & 8 \end{array}\right).$$

Lösen wir nun dieses lineare Gleichungssystem, so erhalten wir

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 12 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ \cdot 1 \\ \cdot 3 \ + \end{array} \Big| \cdot (-1) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 8 \end{array}\right) \Big| \cdot \tfrac{1}{18} \quad \begin{array}{l} + \\ \cdot 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} + \\ \cdot(-3) \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{8}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{9} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{8}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{9} \end{array}\right).$$

Also lauten die Koeffizienten:

$$a_0 = \frac{8}{9}, \; a_1 = \frac{2}{3} \text{ und } a_2 = \frac{4}{9}.$$

Damit ist die Quadraturformel Q_a gegeben durch

$$\int\limits_{-1}^{1} g(x)\mathrm{d}x \approx Q_a(g) = \frac{8}{9}g\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3}g(0) + \frac{4}{9}g(1) = \frac{2}{9}\left(4g\left(-\frac{1}{2}\right) + 3g(0) + 2g(1)\right)$$

für alle stetigen Funktionen $g\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ und diese ist für alle Polynome $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Grad kleiner gleich 2 exakt. $\square$

Bemerkung: Die oben bewiesene Quadraturformel ist für Polynome mit höheren Graden nicht mehr zwingend exakt, denn es gilt z.B. für das Monom $p_3(x) = x^3,\ x \in \mathbb{R}$:

$$\int\limits_{-1}^{1} p_3(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} x^3\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0,$$

aber wir haben:

$$\begin{aligned} Q_a(p_3) &= \frac{8}{9}p_3\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3}p_3(0) + \frac{4}{9}p_3(1) = \frac{8}{9}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3}\cdot 0 + \frac{4}{9} = -\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{8} + \frac{2}{3}\cdot 0 + \frac{4}{9} = -\frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \\ &\neq 0 = \int\limits_{-1}^{1} p_3(x)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

(b) Setze

$$Q_b(g) := g\left(0\right) + a_0 g\left(x_0\right) + a_1 g\left(x_1\right)$$

für stetige Funktionen $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$. Es soll gelten:

$$\int\limits_{0}^{1} p(x)\mathrm{d}x \overset{!}{=} Q_b(p) \text{ für alle Polynome } p\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ mit Grad kleiner gleich } 3.$$

Aufgrund der Linearität des Integrals und der Funktion Q_b genügt es für uns die jeweiligen Monome p_0, p_1, p_2 und p_3 zu überprüfen. Wir erhalten somit aus der obigen Forderung:

$$p_0(x) = 1: \quad 1 = [1-0] = [x]_0^1 = \int\limits_0^1 1\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 p_0(x)\mathrm{d}x \overset{!}{=} Q_b\left(p_0\right) = p_0(0) + a_0 p_0\left(x_0\right) + a_1 p_0\left(x_1\right) = 1 + a_0 + a_1,$$

$$\Leftrightarrow\ a_0 + a_1 = 0\ \Leftrightarrow\ a_1 = -a_0,$$

$$\begin{aligned} p_1(x) = x: \quad \frac{1}{2} = \left[\frac{1}{2} - 0\right] = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \int\limits_0^1 x\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 p_1(x)\mathrm{d}x &\overset{!}{=} Q_b\left(p_1\right) = p_1(0) + a_0 p_1\left(x_0\right) + a_1 p\left(x_1\right) = a_0x_0 + a_1x_1 \\ &= a_0x_0 - a_0x_1 = a_0\left(x_0 - x_1\right) \\ \Leftrightarrow\ a_0 &= \frac{1}{2\left(x_0 - x_1\right)} \text{ für } x_0 \neq x_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_2(x) = x^2: \quad \frac{1}{3} = \left[\frac{1}{3} - 0\right] = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \int\limits_0^1 x^2\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 p_2(x)\mathrm{d}x &\overset{!}{=} Q_b\left(p_2\right) = p_2(0) + a_0 p_2\left(x_0\right) + a_1 p_2\left(x_1\right) \\ &= a_0x_0^2 - a_0x_1^2 = a_0\left(x_0^2 - x_1^2\right) \\ &= \frac{\left(x_0 - x_1\right)\left(x_0 + x_1\right)}{2\left(x_0 - x_1\right)} = \frac{x_0 + x_1}{2} \\ \Leftrightarrow\ \frac{2}{3} &= x_0 + x_1\ \Leftrightarrow\ x_1 = \frac{2}{3} - x_0,\ x_1^2 = \frac{4}{9} - \frac{4}{3}x_0 + x_0^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_3(x) = x^3: \quad \frac{1}{4} = \left[\frac{1}{4} - 0\right] = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \int\limits_0^1 x^3\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 p_3(x)\mathrm{d}x &\overset{!}{=} Q_b\left(p_3\right) = p_3(0) + a_0 p_3\left(x_0\right) + a_1 p_3\left(x_1\right) \\ &= a_0x_0^3 - a_0x_1^3 = a_0\left(x_0^3 - x_1^3\right) = \frac{\left(x_0^3 - x_1^3\right)}{2\left(x_0 - x_1\right)} \\ &= \frac{x_0^2 + x_0x_1 + x_1^2}{2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow\ \frac{1}{2} &= x_0^2 + x_0x_1 + x_1^2 = x_0^2 + \frac{2}{3}x_0 - x_0^2 + \frac{4}{9} - \frac{4}{3}x_0 + x_0^2 \\
&= x_0^2 - \frac{2}{3}x_0 + \frac{4}{9} \\
\Leftrightarrow\ 0 &= x_0^2 - \frac{2}{3}x_0 - \frac{1}{18} \\
\Leftrightarrow\ x_0 &= \frac{\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{2}{9}}}{2} = \frac{1}{3} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{6}{9}} \\
&= \frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{1}{3} \pm \frac{1}{\sqrt{6}}.
\end{aligned}
$$

Wegen $x_0 \in [0,1]$ und $2 = \sqrt{4} < \sqrt{6} < \sqrt{9} = 3$ ist, folgt nun

$$x_0 = \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{6}} \in [0,1].$$

Dies liefert uns dann

$$x_1 = \frac{2}{3} - x_0 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{6}},$$

d.h. wegen $\sqrt{6} < 3$, dass $x_1 < 0$ ist, d.h. $x_1 \notin [0,1]$. Weiter müssen wir noch den Fall $x_0 = x_1$ untersuchen, welcher aber direkt zum Widerspruch führt in

$$\frac{1}{3} = a_0x_0^2 + a_1x_1^2 = a_0x_0^2 - a_0x_0^2 = 0 \neq \frac{1}{3}.$$

Damit kann Q_b keine Quadraturformel sein, die die Bedingung erfüllt. □

Bemerkung: Ändern wir das Integral und die Quadraturformel etwas ab, dann können wir es aber lösen:

$$\int_{-1}^{1} g(x)\mathrm{d}x \approx a_0g(0) + g(x_0) + a_1g(x_1) =: Q_c(g).$$

Ziel soll es wieder sein die Gewichte a_0 und a_1, sowie die Stützstellen $x_0, x_1 \in [-1,1]$ so zu bestimmen, dass für alle Polynome $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Grad kleiner gleich 3 die Quadraturformel exakt ist, d.h. für p gelte dann:

$$\int_{-1}^{1} p(x)\mathrm{d}x = Q_c(p).$$

Aufgrund der Linearität des Integrals und der Funktion Q_c genügt es für uns die jeweiligen Monome p_0, p_1, p_2 und p_3 zu überprüfen. Wir erhalten somit aus der obigen Forderung:

$$
\begin{aligned}
p_0(x) = 1: \quad & 2 = [1-(-1)] = [x]_{-1}^{1} = \int_{-1}^{1} 1\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} p_0(x)\mathrm{d}x \overset{!}{=} Q_c(p_0) = a_0p_0(0) + p_0(x_0) + a_1p_0(x_1) = a_0 + 1 + a_1, \\
& \Leftrightarrow\ a_0 + a_1 = 1 \ \Leftrightarrow\ a_1 = 1 - a_0, \\
p_1(x) = x: \quad & 0 = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{1} = \int_{-1}^{1} x\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} p_1(x)\mathrm{d}x \overset{!}{=} Q_c(p_1) = a_0p_1(0) + p_1(x_0) + a_1p(x_1) = x_0 + a_1x_1 \\
& \Leftrightarrow\ a_1 = -\frac{x_0}{x_1} \text{ für } x_1 \neq 0, \\
p_2(x) = x^2: \quad & \frac{2}{3} = \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right] = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \int_{-1}^{1} x^2\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} p_2(x)\mathrm{d}x \overset{!}{=} Q_c(p_2) = a_0p_2(0) + p_2(x_0) + a_1p_2(x_1) \\
& = x_0^2 + a_1x_1^2 = x_0^2 - x_0x_1 \\
& \Leftrightarrow\ x_0x_1 = x_0^2 - \frac{2}{3} \ \Leftrightarrow\ x_1 = \frac{x_0^2 - \frac{2}{3}}{x_0} \text{ für } x_0 \neq 0, \\
p_3(x) = x^3: \quad & 0 = \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right] = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{1} = \int_{-1}^{1} x^3\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} p_3(x)\mathrm{d}x \overset{!}{=} Q_c(p_3) = a_0p_3(0) + p_3(x_0) + a_1p_3(x_1) \\
& = x_0^3 + a_1x_1^3 = x_0^3 - x_0x_1^2 = x_0^3 - \frac{\left(x_0^2 - \frac{2}{3}\right)^2}{x_0}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{x_0^4 - x_0^4 + \frac{4}{3}x_0^2 - \frac{4}{9}}{x_0} = \frac{4\left(x_0^2 - \frac{1}{3}\right)}{3x_0} \Leftarrow$$

Damit wäre $x_0 \in [-1, 1]$ und es gilt:

$$x_1 = \frac{x_0^2 - \frac{2}{3}}{x_0} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{2}{3}}{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}} = - \pm \frac{\sqrt{3}}{3} = \mp\frac{1}{\sqrt{3}} = -x_0 \in [-1, 1].$$

Weiter ist:

$$a_1 = -\frac{x_0}{x_1} = -\frac{x_0}{-x_0} = 1 \text{ und } a_0 = 1 - a_1 = 1 - 1 = 0.$$

Also lautet die Quadraturformel Q_c, welche exakt ist für Polynome bis Grad drei gerade

$$\int_{-1}^{1} g(x)\mathrm{d}x \approx Q_c(g) = 0 \cdot g(0) + g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 1 \cdot g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Der Fall $x_0 = 0$ kann nicht auftreten, denn dann würde folgen:

$$0 = x_0 + a_1x_1 = a_1x_1 \;\Leftrightarrow\; x_1 = 0 \text{ oder } a_1 = 0,$$

was zum Widerspruch führt in

$$\frac{2}{3} = x_0^2 + a_1x_1^2 = 0 + 0 = 0 \neq \frac{2}{3}.$$

Der Fall $x_1 = 0$ kann auch nicht auftreten, denn dann würde folgen:

$$0 = x_0 + a_1x_1 = x_0,$$

was zum Widerspruch führt in

$$\frac{2}{3} = x_0^2 + a_1x_1^2 = (0)^2 + a_1 \cdot 0^2 = 0 + 0 = 0 \neq \frac{2}{3}.$$

□

Bemerkung: Wir können erneut zeigen, dass für einen höheren Grad an Polynomen nicht zwingend Gleichheit herrschen muss, denn es gilt:

$$\int_{-1}^{1} p_4(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} x^4\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{5}x^5\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5},$$

$$Q_c(p_4) = p_4\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + p_4\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$$
$$\neq \frac{2}{5} = \int_{-1}^{1} p_4(x)\mathrm{d}x.$$

Aber für alle Polynome mit ausschließlich ungeraden Potenzen haben wir dennoch Gleichheit, denn sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade, d.h. es existiert ein $k \in \mathbb{N}_0$ mit $n = 2k + 1$, und weiter sei

$$p_n(x) = x^n = x^{2k+1} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Also haben wir

$$\int_{-1}^{1} p_n(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} x^{2k+1}\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2k+2}x^{2k+2}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2(k+1)}1^{2(k+1)} - \frac{1}{2(k+1)}(-1)^{2(k+1)} = \frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{2(k+1)} = 0,$$

$$Q_c(p_n) = p_n\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + p_n\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2k+1} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2k+1}$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{3}^{2k+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}^{2k+1}} = 0 = \int_{-1}^{1} p_n(x)\mathrm{d}x.$$

So sehen wir ein, dass es auch Polynome mit einem höheren Grad als drei geben kann für die Gleichheit gilt. □

Bemerkung/ Erklärung, warum wir nur Monome betrachten: Wir setzen als das $n$te Monom $p_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ durch

$$p_n(x) := x^n \text{ für } x \in \mathbb{R}.$$

Es ist klar, dass das Monom p_n ein Polynom vom Grad n ist für $n \in \mathbb{N}_0$. Sei nun $n \in \mathbb{N}_0$ fest, aber beliebig und $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Polynom vom Grad n, d.h. p hat die Form

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k p_k(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

mit Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Seien U und V zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume zum Körper $\mathbb{K}$, dann nennen wir eine Abbildung $A\colon U \to V$ linear, falls gilt:

$$A(u + \lambda v) = A(u) + \lambda A(v) \text{ für alle } u, v \in U \text{ und für alle } \lambda \in \mathbb{K}.$$

Angenommen wir haben eine Quadraturformel

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} g(x)\mathrm{d}x \approx Q(g) := \sum_{k=0}^{N} \omega_k g(x_k)$$

mit $N \in \mathbb{N}_0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < \beta$, Gewichten $\omega_0, \ldots, \omega_N \in \mathbb{R}$ und Stützstellen $x_0, \ldots, x_N \in [\alpha, \beta]$. Dann sind die beiden Abbildungen

$$A(g) := \int\limits_{-1}^{1} g(x)\mathrm{d}x \text{ und } Q(g) = \sum_{k=0}^{N} \omega_k g(x_k)$$

linear auf dem Vektorraum der stetigen Funktionen $g\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ (d.h. $U = C^0([\alpha, \beta], \mathbb{R})$, $V = \mathbb{R}$ und $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), denn es gilt:

$$\begin{aligned}
A(f + \lambda g) &= \int\limits_{-1}^{1} (f + \lambda g)(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} (f(x) + \lambda g(x))\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{-1}^{1} \lambda g(x)\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x + \lambda \int\limits_{-1}^{1} g(x)\mathrm{d}x = A(f) + \lambda A(g), \\
Q(f + \lambda g) &= \sum_{k=0}^{N} \omega_k (f + \lambda g)(x_k) = \sum_{k=0}^{N} \omega_k (f(x_k) + \lambda g(x_k)) = \sum_{k=0}^{N} \omega_k f(x_k) + \sum_{k=0}^{N} \omega_k \lambda g(x_k) \\
&= \sum_{k=0}^{N} \omega_k f(x_k) + \lambda \sum_{k=0}^{N} \omega_k g(x_k) = Q(f) + \lambda Q(g)
\end{aligned}$$

für alle stetigen Funktionen $f, g\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ und für alle Skalare $\lambda \in \mathbb{R}$. Gilt nun

$$A(p_k) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} p_(x)\mathrm{d}x = Q(p_k) \text{ für alle } k = 0, \ldots, n,$$

dann folgt nun induktiv wegen der Linearität der Abbildungen A und Q:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\alpha}^{\beta} p(x)\mathrm{d}x = A(p) = A\left(\sum_{k=0}^{n} a_k p_k\right) &= \sum_{k=0}^{n} a_k A(p_k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k Q(p_k) = Q\left(\sum_{k=0}^{n} a_k p_k\right) = Q(p).
\end{aligned}$$

Nun war p ein beliebiges Polynom vom Grad n, also gilt es für alle Polynome vom Grad n. □

Aufgabe 3 (Maximale Exaktheit von Quadraturformeln)

In dieser Aufgabe stellen wir uns die Frage, wie exakt kann eine Quadraturformel maximal sein. Dazu sei $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$, sowie $x_0, \ldots, x_n \in [a,b]$, $n \in \mathbb{N}_0$, eine beliebige Unterteilung des Intervalls I, d.h. es gilt:

$$a \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leq b.$$

Wir setzen die Quadraturformel

$$Q(f) := \sum_{k=0}^{n} \omega_k f(x_k)$$

für stetige Funktionen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit Gewichten $\omega_0, \ldots, \omega_n \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Quadraturformel Q höchstens für alle Polynome bis zum Grad $2n+1$ maximal sein kann, d.h. es gibt ein Polynom p vom Grad $2n+2$ so, dass

$$Q(p) \neq \int\limits_a^b p(x)\mathrm{d}x$$

ist.

Lösung von Aufgabe 3

Setze das Polynom

$$p(x) := (x - x_0)^2 \cdot \ldots \cdot (x - x_n)^2 = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k)^2 \text{ für } x \in \mathbb{R}.$$

Dann ist p ein Polynom vom Grad $2n+2$. Insbesondere gilt für alle $\widetilde{x} \in \mathbb{R} \setminus \{x_0, \ldots, x_n\}$:

$$p(\widetilde{x}) = \prod_{k=0}^{n} \underbrace{(\widetilde{x} - x_k)^2}_{>0} > 0$$

und

$$p(x_j) = \prod_{k=0}^{n} (x_j - x_k)^2 = (x_j - x_j)^2 \prod_{k=0;\ k\neq j}^{n} (x - x_k)^2 = 0 \text{ für alle } j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Demnach ist

$$Q(p) = \sum_{k=0}^{n} \omega_k p(x_k) = \sum_{k=0}^{n} \omega_k \cdot 0 = 0.$$

Insbesondere sind Polynome stets stetig auf $\mathbb{R}$, also haben wir nun

$$Q(p) = 0 < \int\limits_a^b p(x)\mathrm{d}x,$$

d.h.

$$\int\limits_a^b p(x)\mathrm{d}x \neq Q(p).$$

$\square$

Aufgabe 4 (Fresnel-Integral mithilfe der Trapez- und Simpsonregel)

Gegeben sei das Fresnel-Integral

$$I := \int\limits_0^\pi \sin^2(x)\mathrm{d}x.$$

(a) Berechnen Sie das Fresnel-Integral I.

(b) Nähern Sie das Fresnel-Integral I mit der Trapezregel, der summierten Trapezregel zur Schrittweite $h = \frac{\pi}{6}$ und der Simpsonregel an.

(c) Schätzen Sie für alle drei Näherungen den Fehler ab und vergleichen Sie die Abschätzungen mit dem wirklichen Fehler.

Lösung von Aufgabe 4

(a) Wir erhalten durch Partielle Integration

$$\begin{aligned}
I &= \int\limits_0^\pi \sin^2(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi \sin^2(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi \sin(x)\cdot\sin(x)\mathrm{d}x \overset{\text{P.I.}}{=} \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi \sin^2(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\left[-\sin(x)\cos(x)\right]_0^\pi + \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi \cos^2(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi \left(\sin^2(x) + \cos^2(x)\right)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\left(-\sin(\pi)\cos(\pi) + \sin(0)\cos(0)\right) \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi 1\mathrm{d}x + \frac{1}{2}(0+0) = \frac{1}{2}[x]_0^\pi = \frac{1}{2}(\pi - 0) = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

laut dem trigonometrischen Pythagoras

$$\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1 \text{ für alle } \varphi \in \mathbb{R}.$$

Damit lautet nun das Fresnel-Integral

$$I = \int\limits_0^\pi \sin^2(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

(b) Wir definieren die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin^2(x),$$

dann ist die Funktion f gerade der Integrand des Fresnel-Integrals I.
Trapezregel: Es gilt nach der Trapezregel:

$$I = \int\limits_0^\pi f(x)\mathrm{d}x \approx (\pi - 0)\,\frac{f(0)+f(\pi)}{2} = \frac{\sin^2(0)+\sin^2(\pi)}{2}\pi = \frac{0+0}{2}\pi = 0.$$

Summierte Trapezregel mit Schrittweite $h = \frac{\pi}{6}$: Es gilt nach der summierten Trapezregel mit Schrittweite $h = \frac{\pi}{6}$ (d.h. $n = \frac{\pi-0}{\frac{\pi}{6}} = 6$):

$$\begin{aligned}
I = \int\limits_0^\pi f(x)\mathrm{d}x &\approx \frac{\frac{\pi}{6}}{2}\left[f(0) + 2f\left(0+\frac{\pi}{6}\right) + 2f\left(0+\frac{2}{6}\pi\right) + 2f\left(0+\frac{3}{6}\pi\right) + 2f\left(0+\frac{4}{6}\pi\right) + 2f\left(0+\frac{5}{6}\pi\right) + f(\pi)\right] \\
&= \frac{\pi}{12}\left[\sin^2(0) + 2\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + 2\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2f\left(\frac{2}{3}\pi\right) + 2f\left(\frac{5}{6}\pi\right) + \sin^2(\pi)\right] \\
&= \frac{\pi}{12}\left[0 + 2\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{3}{4} + 2\cdot 1 + 2\cdot\frac{3}{4} + 2\cdot\frac{1}{4} + 0\right] = \frac{\pi}{12}\left[\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + 2 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right] \\
&= \frac{\pi}{12}\cdot\frac{1+3+4+3+1}{2} = \frac{12}{24}\pi = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Simpsonregel: Es gilt nach der Simpsonregel:

$$I = \int\limits_0^\pi f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{\pi-0}{6}\left[f(0) + 4f\left(\frac{\pi-0}{2}\right) + f(\pi)\right] = \frac{\pi}{6}\left[\sin^2(0) + 4\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin^2(\pi)\right]$$

$$= \frac{\pi}{6}\left[0 + 4 \cdot 1 + 0\right] = \frac{4}{6}\pi = \frac{2}{3}\pi.$$

(c) Die Funktion f ist eine glatte Funktion, demnach ist sie insbesondere 4mal stetig-differenzierbar mit Ableitungen (laut Produkt- und Kettenregel):

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2\sin(x)\cos(x) = 2 \cdot \frac{1}{2}\sin(2x) = \sin(2x), \\
f''(x) &= 2\cos(2x), \\
f'''(x) &= -4\sin(2x), \\
f^{(4)}(x) &= -8\cos(2x)
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ nach der Folgerung aus dem Additionstheorem

$$\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Es gelten die Abschätzungen, da die Cosinusfunktion betragsmäßig durch 1 beschränkt ist:

$$|f''(x)| = |2\cos(2x)| \leq 2 \text{ und } \left|f^{(4)}(x)\right| = |-8\cos(2x)| \leq 8 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Fehlerbetrachtung bei der Trapezregel: Es gilt die Fehlerabschätzung:

$$|R_1(f)| = \left|-\frac{1}{12}\left(\frac{\pi - 0}{1}\right)^3 f''(\eta)\right| = \frac{\pi^3}{12}\left|f''(\eta)\right| \leq \frac{\pi^3}{12} \cdot 2 = \frac{\pi^3}{6}$$

für ein $\eta \in [0, \pi]$. Der absolute Fehler/ echte Fehler lautet:

$$|I - 0| = |I| = \frac{\pi}{2}.$$

Die Differenz zwischen absoluten Fehler und der Fehlerabschätzung beträgt

$$\frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{2} = \left(\frac{\pi^2}{3} - 1\right)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2 - 3}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2 - 3}{6}\pi > 0.$$

Fehlerbetrachtung bei der summierten Trapezregel: Es gilt die Fehlerabschätzung:

$$\left|R_{\frac{\pi}{6}}(f)\right| = \left|-\frac{\pi - 0}{12}\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 f''(\eta)\right| = \frac{\pi^3}{12 \cdot 36}\left|f''(\eta)\right| \leq \frac{\pi^3}{432} \cdot 2 = \frac{\pi^3}{216}$$

für ein $\eta \in [0, \pi]$. Der absolute Fehler/ echte Fehler lautet:

$$\left|I - \frac{\pi}{2}\right| = |0| = 0.$$

Die Differenz zwischen absoluten Fehler und der Fehlerabschätzung beträgt

$$\frac{\pi^3}{216} - 0 = \frac{\pi^3}{216} > 0.$$

Fehlerbetrachtung bei der Simpsonregel: Es gilt die Fehlerabschätzung:

$$|R_2(f)| = \left|-\frac{1}{90}\left(\frac{\pi - 0}{2}\right)^5 f^{(4)}(\eta)\right| = \frac{\pi^5}{90 \cdot 2^5}\left|f^{(4)}(\eta)\right| \leq \frac{\pi^5}{360 \cdot 8} \cdot 8 = \frac{\pi^5}{360}$$

für ein $\eta \in [0, \pi]$. Der absolute Fehler/ echte Fehler lautet:

$$\left|I - \frac{2}{3}\pi\right| = \left|\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\pi\right| = \left|\frac{3 - 4}{6}\right|\pi = \frac{\pi}{6}.$$

Die Differenz zwischen absoluten Fehler und der Fehlerabschätzung beträgt

$$\frac{\pi^5}{360} - \frac{\pi}{6} = \left(\frac{\pi^4}{60} - 1\right)\frac{\pi}{6} = \frac{\pi^4 - 60}{60} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi^4 - 60}{360}\pi > 0.$$

$\square$