

Numerische Methoden

8. Übungsblatt

(wird am Freitag, den 26.07.2019 besprochen)

Aufgabe 1 (Möglichst hohe Konsistenzordnung)

Sei $t_0 \in \mathbb{R}$ beliebig. Betrachten wir das folgende Verfahren

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= u_n + h [b_1 f(u_n) + b_2 f(u_n + h a f(u_n))] \\ u_0 &= y(t_0)\end{aligned}$$

für $n = 0, \dots, N - 1$ und reellen Parametern b_1, b_2 und a zur Diskretisierung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned}y'(t) &= f(y(t)), \\ y(t_0) &= y_0\end{aligned}$$

für ein $y_0 \in \mathbb{R}$. Ziel dieser Aufgabe soll es sein herauszufinden, welche Bedingungen für die jeweiligen Konsistenzordnungen gelten und was die maximale Konsistenzordnung des obigen Verfahrens ist. Untersuchen Sie daher das obige Verfahren auf Konsistenzordnung(en). Welche Bedingungen werden dafür benötigt?

Aufgabe 2 (Einschrittverfahren)

Gegeben sei y als die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned}y' &= x^2 + y^2 - 1, \\ y(0) &= 1.\end{aligned}$$

Berechnen Sie Näherungen an $y(1)$ unter der Verwendung

- (a) des Euler-Verfahrens zu den Schrittweiten $h_1 = \frac{1}{2}$ und $h_2 = \frac{1}{4}$.
- (b) des Verfahrens von Heun zu der Schrittweite $h = \frac{1}{2}$.
- (c) des Halbschrittverfahrens zu der Schrittweite $h = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 3 (Differenzenquotienten)

Seien $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine genügend glatte (d.h. genügend oft differenzierbare) Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$ ein beliebiger Punkt. Zeigen Sie:

- (a) Es gilt für den Vorwärtsdifferenzenquotienten:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + O(h) \text{ für } h \rightarrow 0.$$

- (b) Es gilt für den Rückwärtsdifferenzenquotienten:

$$\frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} = f'(x_0) + O(h) \text{ für } h \rightarrow 0.$$

- (c) Es gilt für den zentralen Differenzenquotienten:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = f'(x_0) + O(h^2) \text{ für } h \rightarrow 0.$$

Aufgabe 4 (Finite Differenzen)

Gegeben sei das Randwertproblem

$$\begin{aligned}y''(x) &= x^2 - y(x) + 1 \text{ für } x \in (0, 4), \\y(0) &= -1, \\y(4) &= 15.\end{aligned}$$

Berechnen Sie eine Näherung für $y(2)$ der Lösung y mit Hilfe des Finite-Differenzen-Verfahrens mit den Stützstellen $x_n = n$ für $n = 0, \dots, 4$.

Bemerkung:

Einige Vorabinformationen bezüglich der Klausur und der Anmeldung:

- Die **Klausur** zu dieser Lehrveranstaltung findet am **Freitag**, den **06.09.2019**, von 08.00 Uhr bis 10.00 Uhr statt.
- Die Bearbeitungsdauer der Klausur beträgt zwei Stunden.
- Der **Anmeldeschluss** für diese Klausur ist der Sonntag, der 18.08.2019.
- Eine Anmeldung zu einem späteren Zeitpunkt als der 18.08.2019 ist nicht möglich!
- Eine Abmeldung von dieser Klausur kann in der Regel bis einen Tag vor der Klausur online oder am Tag der Klausur persönlich vor Ort/ Hörsaal geschehen.
- Sollte es noch Fragen wegen der Klausur oder Schwierigkeiten beim Anmelden geben, so wenden Sie sich an Michael Ullmann.
- Zugelassene Hilfsmittel sind
 - nicht-programmierbarer, nicht-grafikfähiger Taschenrechner.
 - aktuelle Formelsammlung zu Klausur (siehe Homepage der Veranstaltung; wird direkt vor der Klausur ausgeteilt).