22.07.2019
PD Dr. Peer Kunstmann
M.Sc. Michael Ullmann

Numerische Methoden

Lösungsvorschläge zum 8. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Möglichst hohe Konsistenzordnung)

Sei $t_0 \in \mathbb{R}$ beliebig. Betrachten wir das folgende Verfahren

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + h\left[b_1 f(u_n) + b_2 f(u_n + haf(u_n))\right] \\ u_0 &= y(t_0) \end{aligned}$$

für $n = 0, \ldots, N-1$ und reellen Parametern b_1, b_2 und a zur Diskretisierung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(y(t)), \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}$$

für ein $y_0 \in \mathbb{R}$. Ziel dieser Aufgabe soll es sein herauszufinden, welche Bedingungen für die jeweiligen Konsistenzordnungen gelten und was die maximale Konsistenzordnung des obigen Verfahrens ist. Untersuchen Sie daher das obige Verfahren auf Konsistenzordnung(en). Welche Bedingungen werden dafür benötigt?

Lösung von Aufgabe 1

Die $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ entsprechen Nährungslösungen zu $(y(t_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $t_n = t_0 + nh$, $n \in \mathbb{N}_0$, d.h.

$$u_0 = y(t_0) = y_0 \text{ und } u_n \approx y(t_n) \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Weiter setzen wir die Funktion

$$\Phi(y,h) = b_1 f(y) + b_2 f(y + haf(y)) \text{ für alle } y \in \mathbb{R} \text{ und } h > 0.$$

Also hat das Verfahren die Form

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + h\left[b_1 f(y) + b_2 f(y + haf(y))\right] = u_n + h\Phi(u_n, h) \text{ für } n \in \mathbb{N}_0, \\ u_0 &= y_0. \end{aligned}$$

Es gilt für die Ableitungen von der Lösung y nach Ketten- und Produktregel:

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(y(t)), \\ y''(t) &= f'(y(t)) \cdot y'(t) = f'(y(t))f(y(t)), \\ y'''(t) &= f''(y(t))f(y(t)) \cdot y'(t) + f'(y(t))f'(y(t)) \cdot y'(t) = f''(y(t))f(y(t))f(y(t)) + f'(y(t))^2 f(y(t)) \\ &= f''(y(t))f(y(t))^2 + f'(y(t))^2 f(y(t)). \end{aligned}$$

Für die partielle Ableitung der Funktion Φ nach h gilt laut Kettenregel:

$$\begin{aligned} \Phi(y,h) &= b_1 f(y) + b_2 f(y + haf(y)), \\ \frac{\partial \Phi}{\partial h}(y,h) &= 0 + b_2 f'(y + haf(y)) \cdot af(y) = ab_2 f'(y + haf(y)) f(y), \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial h^2}(y,h) &= ab_2 f''(y + haf(y)) f(y) \cdot af(y) = a^2 b_2 f''(y + haf(y)) f(y)^2 \end{aligned}$$

für alle $y \in \mathbb{R}$ und $h > 0$. Weiter erhalten wir für $h = 0$:

$$\begin{aligned} \Phi(y,0) &= b_1 f(y) + b_2 f(y + 0 \cdot af(y)) = b_1 f(y) + b_2 f(y) = (b_1 + b_2) f(y), \\ \frac{\partial \Phi}{\partial h}(y,0) &= ab_2 f'(y + 0 \cdot af(y)) f(y) = ab_2 f'(y) f(y), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial h^2}(y,0) = a^2 b_2 f''(y + 0 \cdot a f(y)) f(y)^2 = a^2 b_2 f''(y) f(y)^2$$

für alle $y \in \mathbb{R}$ und $h > 0$. Nach dem Satz von Taylor (sofern die Funktion f mindestens dreimal stetig differenzierbar ist) gilt:

$$\begin{aligned}
y(t_{n+1}) &= y(t_n + h) \\
&= \frac{y(t_n)}{0!}(t_n + h - t_n)^0 + \frac{y'(t_n)}{1!}(t_n + h - t_n)^1 + \frac{y''(t_n)}{2!}(t_n + h - t_n)^2 + \frac{y'''(t_n)}{6!}(t_n + h - t_n)^3 + \underbrace{r_y(h)}_{\in O(h^4)} \\
&= y(t_n) + f(y(t_n)) h + f'(y(t_n)) f(y(t_n)) \frac{h^2}{2} + \left[f''(y(t_n)) f(y(t_n))^2 + f'(y(t_n))^2 f(y(t_n)) \right] \frac{h^3}{6} + O(h^4), \\
\Phi(y,h) &= \frac{\Phi(y,0)}{0!}(h-0)^0 + \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial h}(y,0)}{1!}(h-0)^1 + \frac{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial h^2}(y,0)}{1!}(h-0)^2 + \underbrace{r_\Phi(h)}_{\in O(h^3)} \\
&= (b_1 + b_2) f(y) + a b_2 f'(y) f(y) h + a^2 b_2 f''(y) f(y)^2 \frac{h^2}{2} + O(h^3)
\end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und für Restfunktionen r_y und r_Φ. Also gilt nun für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned}
u_{n+1} = u_n + h\Phi(u_n, h) &= u_n + h \left[(b_1 + b_2) f(y) + a b_2 f'(y) f(y) h + a^2 b_2 f''(y) f(y)^2 \frac{h^2}{2} + O(h^3) \right] \\
&= u_n + (b_1 + b_2) f(y) h + a b_2 f'(y) f(y) h^2 + a^2 b_2 f''(y) f(y)^2 \frac{h^3}{2} + hO(h^3) \\
&= u_n + [(b_1 + b_2) f(y)] h + [2 a b_2 f'(y) f(y)] \frac{h^2}{2} + \left[3a^2 b_2 f''(y) f(y)^2 \right] \frac{h^3}{6} + O(h^4).
\end{aligned}$$

Ein Vergleich beider Seiten $y(t_{n+1})$ und u_{n+1} ($u_n \approx y(t_n)$ für $n \in \mathbb{N}$ und $u_0 = y(t_0)$) für die Konsistenz-Ordnung $p = 3$ liefert:

$$\begin{aligned}
(b_1 + b_2) f &= f \text{ auf } \mathbb{R}, \\
2 a b_2 f' f &= f' f \text{ auf } \mathbb{R}, \\
3 a^2 b_2 f'' f^2 &= f'' f^2 + (f')^2 f \text{ auf } \mathbb{R}
\end{aligned}$$

für alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche mindestens dreimal stetig-differenzierbar sind. Aber die dritte Bedingung ist nicht für alle Funktionen erfüllt, denn wähle z.B. $f(x) = x$ für $x \in \mathbb{R}$, so ist die Funktion f glatt (d.h. beliebig oft stetig-differenzierbar) mit den Ableitungen

$$f'(x) = 1 \text{ und } f^{(k)}(x) = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ und } k \in \mathbb{N} \text{ mit } k \geq 2,$$

woraus wir den Widerspruch zu

$$0 = 3a^2 b_2 \cdot 0 \cdot x^2 = 3a^2 b_2 f''(x) f^2(x) = f''(x) f(x)^2 + f'(x)^2 f(x) = 0 \cdot x^2 + 1^2 \cdot x = 0 + x = x$$

für alle $x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ erkennen. Also ist an Konsistenzordnungen nur $p = 1$ und $p = 2$ möglich.
Für Konsistenz-Ordnung $p = 1$ muss gelten:

$$(b_1 + b_2) f = f \text{ auf } \mathbb{R},$$

für alle stetig-differenzierbaren Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, d.h.

$$b_1 + b_2 = 1 \iff b_1 = 1 - b_2$$

und wir haben zwei Freiheitsgrade b_2 und a.
Für Konsistenz-Ordnung $p = 2$ muss gelten:

$$\begin{aligned}
(b_1 + b_2) f &= f \text{ auf } \mathbb{R}, \\
2 a b_2 f' f &= f' f \text{ auf } \mathbb{R}
\end{aligned}$$

für alle zweimal stetig-differenzierbaren Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, d.h.

$$b_1 + b_2 = 1 \text{ und } 2 a b_2 = 1 \iff b_1 = 1 - b_2 \text{ und } a = \frac{1}{2b_2},$$

da $b_2 \neq 0$ sein muss, und wir haben somit einen Freiheitsgrad b_2. □

Aufgabe 2 (Einschrittverfahren)

Gegeben sei y als die eindeutige Lösung des Anfangswertproblemes

$$\begin{aligned} y' &= x^2 + y^2 - 1, \\ y(0) &= 1. \end{aligned}$$

Berechnen Sie Näherungen an $y(1)$ unter der Verwendung

(a) des Euler-Verfahrens zu den Schrittweiten $h_1 = \frac{1}{2}$ und $h_2 = \frac{1}{4}$.

(b) des Verfahrens von Heun zu der Schrittweite $h = \frac{1}{2}$.

(c) des Halbschrittverfahrens zu der Schrittweite $h = \frac{1}{2}$.

Lösung von Aufgabe 2

Ziel: Den Funktionswert $y(1)$ zu approximieren.
Setze dazu die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$$

und $x_0 := 0$, $y_0 := y(x_0) = y(0) = 1$, $\widetilde{x} := 1$. Dann haben wir

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x, y(x)), \\ y(x_0) &= y_0. \end{aligned}$$

Allgemein für eine Schrittweite $h > 0$ haben wir

$$\begin{aligned} x_n &= x_0 + nh, \\ y_n &= y_{n-1} + h\Phi(x_{n-1}, y_{n-1}, h) \text{ für } n = 1, \ldots, N \end{aligned}$$

für eine Diskretisierungsfunktion Φ. Für diese Aufgabe betrachten wir die folgende Schar an Diskretisierungsfunktionen

$$\Phi_\beta(x, y, h) = (1 - \beta) f(x, y) + \beta f\left(x + \frac{h}{2\beta}, y + \frac{h}{2\beta} f(x, y)\right)$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $h > 0$ mit Parameter $\beta > 0$.
(a) **Euler-Verfahren** ($\beta = 0$): Also haben wir hier die folgende Diskretisierungsfunktion

$$\Phi_0(x, y, h) = f(x, y)$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
(a1) **Schrittweite** $h = \frac{1}{2} > 0$: Es gilt somit:

$$\mathbb{N} \ni N = \frac{\widetilde{x} - x_0}{h} = \frac{1 - 0}{\frac{1}{2}} = 2,$$

d.h. $y_2 \approx y(1)$.
Schritt 1. $n = 1$: Es ist

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + 1 \cdot h = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \\ f(x_0, y_0) &= f(0, 1) = 0^2 + 1^1 - 1 = 1 - 1 = 0, \\ y_1 &= y_0 + h\Phi_0(x_0, y_0, h) = 1 + \frac{1}{2} f(0, 1) = 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 1. \end{aligned}$$

Schritt 2. $n = 2 = N$: Es ist

$$\begin{aligned} x_2 &= x_0 + 2 \cdot h = 0 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 = \widetilde{x}, \\ f(x_1, y_1) &= f\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 - 1 = \frac{1}{4} + 1 - 1 = \frac{1}{4}, \\ y_2 &= y_1 + h\Phi_0(x_1, y_1, h) = 1 + \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}, 1\right) = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{8} = \frac{8 + 1}{8} = \frac{9}{8}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$y(1) \approx y_2 = \frac{9}{8} = 1.125.$$

$\square$

(a2) **Schrittweite** $h = \frac{1}{4} > 0$: Es gilt somit:

$$\mathbb{N} \ni N = \frac{\widetilde{x} - x_0}{h} = \frac{1-0}{\frac{1}{4}} = 4,$$

d.h. $y_4 \approx y(1)$.
Schritt 1. $n = 1$: Es ist

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_0 + 1 \cdot h = 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}, \\
f(x_0, y_0) &= f(0,1) = 0^2 + 1^1 - 1 = 1 - 1 = 0, \\
y_1 &= y_0 + h\Phi_0(x_0, y_0, h) = 1 + \frac{1}{2} f(0,1) = 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 1.
\end{aligned}$$

Schritt 2. $n = 2$: Es ist

$$\begin{aligned}
x_2 &= x_0 + 2 \cdot h = 0 + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \\
f(x_1, y_1) &= f\left(\frac{1}{4}, 1\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 1^2 - 1 = \frac{1}{16} + 1 - 1 = \frac{1}{16}, \\
y_2 &= y_1 + h\Phi_0(x_1, y_1, h) = 1 + \frac{1}{4} f\left(\frac{1}{4}, 1\right) = 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16} = 1 + \frac{1}{64} = \frac{64+1}{64} = \frac{65}{64}.
\end{aligned}$$

Schritt 3. $n = 3$: Es ist

$$\begin{aligned}
x_3 &= x_0 + 3 \cdot h = 0 + 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, \\
f(x_2, y_2) &= f\left(\frac{1}{2}, \frac{65}{64}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{65}{64}\right)^2 - 1 = \frac{1}{4} + \frac{4225}{4096} - 1 = \frac{1024 + 4225 - 4096}{4096} = \frac{1153}{4096}, \\
y_3 &= y_2 + h\Phi_0(x_2, y_2, h) = \frac{65}{64} + \frac{1}{4} f\left(\frac{1}{2}, \frac{65}{64}\right) = \frac{65}{64} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1153}{4096} = \frac{65}{64} + \frac{1153}{16384} = \frac{16640 + 1153}{16384} = \frac{17793}{16384}.
\end{aligned}$$

Schritt 4. $n = 4 = N$: Es ist

$$\begin{aligned}
x_4 &= x_0 + 4 \cdot h = 0 + 4 \cdot \frac{1}{4} = 1 = \widetilde{x}, \\
f(x_3, y_3) &= f\left(\frac{3}{4}, \frac{17793}{16384}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{17793}{16384}\right)^2 - 1 = \frac{9}{16} + \frac{316590849}{268435456} - 1 = \frac{150994994 + 316590849 - 268435456}{268435456} \\
&= \frac{199150337}{268435456}, \\
y_4 &= y_3 + h\Phi_0(x_3, y_3, h) = \frac{17793}{16384} + \frac{1}{4} f\left(\frac{1}{2}, \frac{65}{64}\right) = \frac{17793}{16384} + \frac{1}{4} \cdot \frac{199150337}{268435456} = \frac{17793}{16384} + \frac{199150337}{1073741824} \\
&= \frac{1166082048 + 199150337}{1073741824} = \frac{1365232385}{1073741824}.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$y(1) \approx y_4 = \frac{1365232385}{1073741824} \approx 1.27147173975.$$

$\square$

(b) **Heun-Verfahren** ($\beta = \frac{1}{2} > 0$): Also haben wir hier die folgende Diskretisierungsfunktion

$$\begin{aligned}
\Phi_{\frac{1}{2}}(x, y, h) &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) f(x,y) + \frac{1}{2} f\left(x + \frac{h}{2\frac{1}{2}}, y + \frac{h}{2\frac{1}{2}} f(x,y)\right) \\
&= \frac{1}{2} f(x,y) + \frac{1}{2} f(x + h, y + hf(x,y))
\end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Schrittweite $h = \frac{1}{2} > 0$: Es gilt somit:

$$\mathbb{N} \ni N = \frac{\widetilde{x} - x_0}{h} = \frac{1-0}{\frac{1}{2}} = 2,$$

d.h. $y_2 \approx y(1)$.
Schritt 1. $n = 1$: Es ist

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_0 + 1 \cdot h = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \\
f(x_0, y_0) &= f(0,1) = 0^2 + 1^1 - 1 = 1 - 1 = 0, \\
f(x_0 + h, y_0 + hf(x_0, y_0)) &= f\left(0 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} \cdot 0\right) = f\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^1 - 1 = \frac{1}{4} + 1 - 1 = \frac{1}{4}, \\
\Phi_{\frac{1}{2}}(x_0, y_0, h) &= \frac{1}{2} f(x_0, y_0) + \frac{1}{2} f(x_0 + h, y_0 + hf(x_0, y_0)) \\
&= \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = 0 + \frac{1}{8} = \frac{1}{8}, \\
y_1 &= y_0 + h\Phi_{\frac{1}{2}}(x_0, y_0, h) = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = 1 + \frac{1}{16} = \frac{16+1}{16} = \frac{17}{16}.
\end{aligned}$$

Schritt 1. $n = 2 = N$: Es ist

$$\begin{aligned}
x_2 &= x_0 + 1 \cdot h = 0 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 = \widetilde{x}, \\
f(x_1, y_1) &= f\left(\frac{1}{2}, \frac{17}{16}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{17}{16}\right)^1 - 1 = \frac{1}{4} + \frac{289}{256} - 1, = \frac{64 + 289 - 256}{256} = \frac{97}{256}, \\
f(x_1 + h, y_1 + hf(x_1, y_1)) &= f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \frac{17}{16} + \frac{1}{2} \cdot \frac{97}{256}\right) = f\left(1, \frac{17}{16} + \frac{97}{512}\right) = f\left(1, \frac{544 + 97}{512}\right) = f\left(1, \frac{641}{512}\right) \\
&= 1^2 + \left(\frac{641}{512}\right)^1 - 1 = 1 + \frac{410881}{262144} - 1 = \frac{410881}{262144}, \\
\Phi_{\frac{1}{2}}(x_1, y_1, h) &= \frac{1}{2} f(x_1, y_1) + \frac{1}{2} f(x_1 + h, y_1 + hf(x_1, y_1)) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{97}{256} + \frac{1}{2} \cdot \frac{410881}{262144} = \frac{99328 + 410881}{524288} = \frac{510209}{524288}, \\
y_2 &= y_1 + h\Phi_{\frac{1}{2}}(x_1, y_1, h) = \frac{17}{16} + \frac{1}{2} \cdot \frac{510209}{524288} = \frac{17}{16} + \frac{510209}{1048576} \\
&= \frac{1114112 + 510209}{1048576} = \frac{1624321}{1048576}.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$y(1) \approx y_2 = \frac{1624321}{1048576} \approx 1.5490732193.$$

□

(c) **Halbschrittverfahren** ($\beta = 1 > 0$): Also haben wir hier die folgende Diskretisierungsfunktion

$$\begin{aligned}
\Phi_1(x, y, h) &= (1 - 1) f(x, y) + 1 \cdot f\left(x + \frac{h}{2 \cdot 1}, y + \frac{h}{2 \cdot 1} f(x, y)\right) \\
&= f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(x, y)\right)
\end{aligned}$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Schrittweite $h = \frac{1}{2} > 0$: Es gilt somit:

$$\mathbb{N} \ni N = \frac{\widetilde{x} - x_0}{h} = \frac{1 - 0}{\frac{1}{2}} = 2,$$

d.h. $y_2 \approx y(1)$.
Schritt 1. $n = 1$: Es ist

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_0 + 1 \cdot h = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \\
f(x_0, y_0) &= f(0,1) = 0^2 + 1^1 - 1 = 1 - 1 = 0, \\
f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} f(x_0, y_0)\right) &= f\left(0 + \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{4} \cdot 0\right) = f\left(\frac{1}{4}, 1\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 1^1 - 1 = \frac{1}{16} + 1 - 1 = \frac{1}{16}, \\
\Phi_1(x_0, y_0, h) &= f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} f(x_0, y_0)\right) = \frac{1}{16}, \\
y_1 &= y_0 + h\Phi_1(x_0, y_0, h) = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} = 1 + \frac{1}{32} = \frac{32+1}{32} = \frac{33}{32}.
\end{aligned}$$

Schritt 2. $n = 2 = N$: Es ist

$$
\begin{aligned}
x_2 &= x_0 + 2 \cdot h = 0 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 = \widetilde{x}, \\
f(x_1, y_1) &= f\left(\frac{1}{2}, \frac{33}{32}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{33}{32}\right)^1 - 1 = \frac{1}{4} + \frac{1089}{1024} - 1 = \frac{256 + 1089 - 1024}{1024} = \frac{321}{1024}, \\
f\left(x_1 + \frac{h}{2}, \frac{33}{32} + \frac{h}{2} f(x_1, y_1)\right) &= f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \frac{33}{32} + \frac{1}{4} \cdot \frac{321}{1024}\right) = f\left(\frac{2+1}{4}, \frac{33}{32} + \frac{321}{4096}\right) = f\left(\frac{3}{4}, \frac{4224 + 321}{4096}\right) \\
&= f\left(\frac{3}{4}, \frac{4545}{4096}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{4545}{4096}\right)^1 - 1 = \frac{9}{16} + \frac{20657025}{16777216} - 1 \\
&= \frac{9437184 + 20657025 - 16777216}{16777216} = \frac{13316993}{16777216}, \\
\Phi_1(x_1, y_1, h) &= f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2} f(x_1, y_0)\right) = \frac{13316993}{16777216}, \\
y_2 &= y_1 + h\Phi_1(x_1, y_1, h) = \frac{33}{32} + \frac{1}{2} \cdot \frac{13316993}{16777216} = \frac{33}{32} + \frac{13316993}{33554432} \\
&= \frac{34603008 + 13316993}{33554432} = \frac{47920001}{33554432}.
\end{aligned}
$$

Damit ist

$$
y(1) \approx y_2 = \frac{47920001}{33554432} \approx 1.42812731862.
$$

□

Aufgabe 3 (Differenzenquotienten)

Seien $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine genügend glatte (d.h. genügend oft differenzierbare) Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$ ein beliebiger Punkt. Zeigen Sie:

(a) Es gilt für den Vorwärtsdifferenzenquotienten:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) + O(h) \text{ für } h \to 0.$$

(b) Es gilt für den Rückwärtsdifferenzenquotienten:

$$\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h} = f'(x_0) + O(h) \text{ für } h \to 0.$$

(c) Es gilt für den zentralen Differenzenquotienten:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} = f'(x_0) + O\left(h^2\right) \text{ für } h \to 0.$$

Lösung von Aufgabe 3

(a) Seien $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig-differenzierbare Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Punkt, dann gilt laut dem Satz von Taylor für ein $\eta \in (x_0, x_0+h)$ mit $h \in (0,1)$:

$$f(x_0+h) = \frac{f(x_0)}{0!}(x_0+h-x_0)^0 + \frac{f'(x_0)}{1!}(x_0+h-x_0)^1 + \frac{f''(\eta)}{2!}(x_0+h-x_0)^2 = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(\eta)}{2}h^2.$$

Also folgt nun für den Vorwärtsdifferenzenquotienten:

$$\begin{aligned}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} &= \frac{f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{f''(\eta)}{2}h^2-f(x_0)}{h} = \frac{f'(x_0)h+\frac{f''(\eta)}{2}h^2}{h}\\ &= f'(x_0) + \underbrace{\frac{f''(\eta)}{2}h}_{\in O(h)} = f'(x_0)+O(h).\end{aligned}$$

□

(b) Seien $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig-differenzierbare Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Punkt, dann gilt laut dem Satz von Taylor für ein $\eta \in (x_0-h, x_0)$ mit $h \in (0,1)$:

$$f(x_0-h) = \frac{f(x_0)}{0!}(x_0-h-x_0)^0 + \frac{f'(x_0)}{1!}(x_0-h-x_0)^1 + \frac{f''(\eta)}{2!}(x_0-h-x_0)^2 = f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{f''(\eta)}{2}h^2.$$

Also folgt nun für den Rückwärtsdifferenzenquotienten:

$$\begin{aligned}\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h} &= \frac{f(x_0)-f(x_0)+f'(x_0)h-\frac{f''(\eta)}{2}h^2}{h} = \frac{f'(x_0)h-\frac{f''(\eta)}{2}h^2}{h}\\ &= f'(x_0) - \underbrace{\frac{f''(\eta)}{2}h}_{\in O(h)} = f'(x_0)+O(h).\end{aligned}$$

□

(c) Seien $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine dreimal stetig-differenzierbare Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Punkt, dann gilt laut dem Satz von Taylor für ein $\eta_- \in (x_0-h, x_0)$ und ein $\eta_+ \in (x_0, x_0+h)$ mit $h \in (0,1)$:

$$\begin{aligned}f(x_0-h) &= \frac{f(x_0)}{0!}(x_0-h-x_0)^0 + \frac{f'(x_0)}{1!}(x_0-h-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x_0-h-x_0)^2 + \frac{f'''(\eta_-)}{3!} + (x_0-h-x_0)^3\\ &= f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 - \frac{f'''(\eta_-)}{6}h^3,\\ f(x_0+h) &= \frac{f(x_0)}{0!}(x_0+h-x_0)^0 + \frac{f'(x_0)}{1!}(x_0+h-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x_0+h-x_0)^2 + \frac{f'''(\eta_+)}{3!} + (x_0+h-x_0)^3\\ &= f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + \frac{f'''(\eta_+)}{6}h^3.\end{aligned}$$

Also folgt nun für den zentralen Differenzenquotienten:

$$\begin{aligned}\frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0-h\right)}{2h} &= \frac{f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)h+\frac{f''\left(x_0\right)}{2}h^2+\frac{f'''\left(\eta_+\right)}{6}h^3-f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)h-\frac{f''\left(x_0\right)}{2}h^2+\frac{f'''\left(\eta_-\right)}{6}h^3}{2h}\\ &= \frac{2f'\left(x_0\right)h+\frac{1}{6}\left[f'''\left(\eta_-\right)+f'''\left(\eta_+\right)\right]h^3}{2h}\\ &= f'\left(x_0\right)+\underbrace{\frac{1}{12}\left[f'''\left(\eta_-\right)+f'''\left(\eta_+\right)\right]h^2}_{\in O(h^2)}\\ &= f'\left(x_0\right)+O\left(h^2\right).\end{aligned}$$

□

Aufgabe 4 (Finite Differenzen)

Gegeben sei das Randwertproblem

$$\begin{aligned} y''(x) &= x^2 - y(x) + 1 \text{ für } x \in (0,4), \\ y(0) &= -1, \\ y(4) &= 15. \end{aligned}$$

Berechnen Sie eine Näherung für $y(2)$ der Lösung y mit Hilfe des Finite-Differenzen-Verfahrens mit den Stützstellen $x_n = n$ für $n = 0, \ldots, 4$.

Lösung von Aufgabe 4

Ziel: Den Funktionswert $y(2)$ zu approximieren.
Setze dazu

$$x_0 = 0,\ x_4 = 4,\ y_0 := y(x_0) = y(0) = -1,\ y_4 := y(x_4) = y(4) = 15 \text{ und } N = 3.$$

Dann haben wir für das Finite-Differenzen Verfahren die Schrittweite h:

$$h = \frac{x_4 - x_0}{N+1} = \frac{4-0}{3+1} = 1 > 0,$$

d.h. $x_k = x_0 + kh = 0 + k = k$ für $k = 0, \ldots, 4$. Nach den zweiten Differenzen gilt:

$$y''(x) = \frac{y(x-h) - 2y(x) + y(x+h)}{h^2} + r(h) \text{ für alle } x \text{ und Schrittweiten } h > 0.$$

Setze daher

$$y''(x_k) \approx \frac{y(x_{k-1}) - 2y(x_k) + y(x_{k+1})}{h^2} \approx y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1},$$

da die Schrittweite $h = 1$ ist, für alle $k = 1, 2, 3$ mit $y_k \approx y(x_k)$. Damit erhalten wir aus

$$y''(x_k) = x_k^2 - y(x_k) + 1 \text{ für } k = 1, 2, 3,$$

die Gleichung

$$y_{k-1} - y_k + y_{k+1} = (y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1}) + y_k = x_k^2 + 1 \text{ für } k = 1, 2, 3.$$

Also ist für die einzelnen Werte von k:

$$\begin{aligned} k = 1: &\quad & -1 - y_1 + y_2 = y_0 - y_1 + y_2 &= x_1^2 + 1 = 1^2 + 1 = 2 \\ & & \Leftrightarrow\ -y_1 + y_2 &= 3, \\ k = 2: & & y_1 - y_2 + y_3 &= x_2^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5, \\ k = 3: & & y_2 - y_3 + 15 = y_2 - y_3 + y_4 &= x_3^2 + 1 = 3^2 + 1 = 10 \\ & & \Leftrightarrow\ y_2 - y_3 &= -5. \end{aligned}$$

Wir lösen nun dieses lineare Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Big|\cdot(-1) \\ \cdot 1 \\ + \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot 1 \\ + \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ \\ \cdot 1 \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right).$$

Also haben wir

$$y_0 = -1,\ y_1 = 0,\ y_2 = 3,\ y_3 = 8 \text{ und } y_4 = 15.$$

Also ist

$$y(2) = y(x_2) \approx y_2 = 3.$$

□

Bemerkung:
Einige Vorabinformationen bzeüglich der Klausur und der Anmeldung:

- Die **Klausur** zu dieser Lehrveranstaltung findet am **Freitag**, den **06.09.2019**, von 08.00 Uhr bis 10.00 Uhr statt.
- Die Bearbeitungsdauer der Klausur beträgt zwei Stunden.
- Der **Anmeldeschluss** für diese Klausur ist der Sonntag, der 18.08.2019.
- Eine Anmeldung zu einem späteren Zeitpunkt als der 18.08.2019 ist nicht möglich!
- Eine Abmeldung von dieser Klausur kann in der Regel bis einen Tag vor der Klausur online oder am Tag der Klausur persönlich vor Ort/ Hörsaal geschehen.
- Sollte es noch Fragen wegen der Klausur oder Schwierigkeiten beim Anmelden geben, so wenden Sie sich an Michael Ullmann.
- Zugelassene Hilfsmittel sind
  - nicht-programmierbarer, nicht-grafikfähiger Taschenrechner.
  - aktuelle Formelsammlung zu Klausur (siehe Homepage der Veranstaltung; wird direkt vor der Klausur ausgeteilt).