Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. S. Wugalter

Frühjahr 2018
12.03.2018

# MODULPRÜFUNG Numerische Methoden
# (Elektrotechnik, Meteorologie, Geodäsie und Geoinformatik)

**Aufgabe 1 (4 Punkte) Lösungsvorschlag:**

**a)** Die LR-Zerlegung mit Pivotisierung liefert die folgenden Matrizen.
Wir setzen zu Beginn $A^{(1)} := A$.
*1. Schritt:* (i) Spaltenpivotisierung: Wegen $4 = \left|a_{21}^{(1)}\right| = \max_{1\leq i\leq 3}\left|a_{i1}^{(1)}\right|$ wird die erste mit der zweiten Zeile vertauscht. Dies leistet die Permutationsmatrix

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

durch Linksmultiplikation von $A^{(1)}$ mit dieser Permutationsmatrix erhalten wir also

$$\tilde{A}^{(1)} := P_1 A^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 10 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 8 \end{bmatrix}.$$

(ii) Eliminationsprozess: Für $i = 2, 3$ setzen wir $l_{i1} = \frac{\tilde{a}_{i1}^{(1)}}{\tilde{a}_{11}^{(1)}}$ und

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -l_{21} & 1 & 0 \\ -l_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Die Linksmultiplikation von $\tilde{A}^{(1)}$ mit $L_1$ bewirkt gerade die Elimination der Elemente der ersten Spalte unterhalb der Diagonalen, es ist

$$A^{(2)} := L_1 \tilde{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 10 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix}.$$

*2. Schritt:* (i) Spaltenpivotisierung: Wegen $\frac{1}{2} = \left|a_{22}^{(2)}\right| = \max_{2\leq i\leq 3}\left|a_{i2}^{(2)}\right|$, ist keine Zeilenvertauschung zur Pivotisierung notwendig. Deswegen setzen wir $P_2 = E$ und $\tilde{A}^{(2)} := P_2 A^{(2)}$.
(ii) Eliminationsprozess: Wir setzen $l_{32} = \frac{\tilde{a}_{32}^{(2)}}{\tilde{a}_{22}^{(2)}} = -1$. Damit ergibt sich

$$A^{(3)} := L_2 \tilde{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 10 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 10 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Fassen wir alle Schritte zusammen, so erhalten wir

$$\begin{aligned} A^{(3)} = L_2 \tilde{A}^{(2)} = L_2 P_2 L_1 P_1 A &= L_2 \underbrace{(P_2 L_1 P_2)}_{=L_1} \underbrace{(P_2 P_1)}_{=P_1=:P} A \\ &= L_2 L_1 P A. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$PA = \underbrace{L_1^{-1} L_2^{-1}}_{=:L} \underbrace{A^{(3)}}_{=:R} = LR$$

mit

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 \end{bmatrix}, \; R = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 10 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \; P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**b)** Um mit Hilfe dieser Matrizen das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ zu lösen, verwenden wir folgende äquivalente Umformungen

$$Ax = b \quad \Longleftrightarrow \quad PAx = Pb \quad \Longleftrightarrow \quad LRx = Pb.$$

Dies führt uns zu

$$\begin{aligned} Ly &= Pb, \\ Rx &= y. \end{aligned}$$

Fur das erste System $Ly = Pb$, also

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix},$$

erhält man durch Vorwärtseinsetzen $y = \begin{bmatrix} 5 \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$. Bei dem zweiten System $Rx = y$, also

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 10 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix},$$

erhält man durch Rückwärtseinsetzen $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ als Lösung.

**Aufgabe 2 (4 Punkte) Lösungsvorschlag:**

**a)** Die Konditionszahl $cond_1(A)$ einer Matrix $A$ ist durch

$$cond_1(A) = \|A\|_1 \|A^{-1}\|_1$$

definiert. Da (mit $A = (a_{ij})$, $A^{-1} = (b_{ij})$ gilt

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,2} \sum_{i=1}^{2} |a_{ij}| = 10, \qquad \|A^{-1}\|_1 = \max_{j=1,2} \sum_{i=1}^{2} |b_{ij}| = \frac{5}{8},$$

folgt

$$cond_1(A) = \frac{25}{4}.$$

**b)** Nach Resultat 4.2 der Vorlesung lässt sich die Fehlerfortpflanzung bei einer Störung der rechten Seite des linearen Gleichungssystems folgendermaßen abschätzen. Bezeichnet $x + \Delta x$ die Lösung des gestörten Gleichungssystems $B(x + \Delta x) = b + \Delta b$, so gilt für den relativen Fehler der Lösung bezüglich der Maximumnorm die Abschätzung

$$\frac{\|\Delta x\|_1}{\|x\|_1} \leq \mathrm{cond}_1(A) \cdot \frac{\|\Delta b\|_1}{\|b\|_1} = \frac{25}{4} \times \frac{10^{-3}}{3} = 2.083 \times 10^{-3}.$$

**c)** Die ersten zwei Schritte der von-Mises Iteration lauten

$$z^1 = Ax^0 = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad x^1 = \frac{z^1}{z_1^1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix},$$
$$z^2 = Ax^1 = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{38}{5} \\ \frac{14}{5} \end{bmatrix}, \quad x^2 = \frac{z^2}{z_1^2} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{7}{19} \end{bmatrix}.$$

Die Näherung im zweiten Schritt ergibt sich durch $z_{i_k}^{k+1}$ für $k = 1$, also $z_1^2 = \frac{38}{5}$.

**Aufgabe 3 (4 Punkte) Lösungsvorschlag:**
Wir bestimmen den maximalen Wert von $Z(x_1, x_2, x_3, x_4)$ mit Hilfe des Simplex-Algorithmus. Um das gegebene Optimierungsproblem in ein Standardmodell zu überführen, substituieren wir $x_4' = -x_4$ und $x_2' = x_2 + 2$. Außerdem multiplizieren wir die erste Nebenbedingung mit $(-1)$, damit das Standardmodell in Normalform vorliegt. Dann ist das gegebene Problem äquivalent zu

$$Z(x_1, x_2', x_3, x_4') = 8x_1 - 2x_2' - 13x_3 + 17x_4' + 19$$

mit den Nebenbedingungen

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4' \leq 4 \\ x_1 - x_2' + x_4' \leq 3 \\ -2x_2' + 3x_3 + x_4' \leq 4 \\ x_1, x_2', x_3, x_4' \geq 0. \end{cases}$$

Das Ausgangstableau des Simplex-Algorithmus lautet also

| | $x_1$ | $x_2'$ | $x_3$ | $x_4'$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | 1 | 0 | -1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 4 |
| $y_2$ | 1 | -1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 3 |
| $y_3$ | 0 | -2 | 3 | 1 | 0 | 0 | 1 | 4 |
| | -8 | 2 | 13 | -17 | 0 | 0 | 0 | 0. |

Da $-17$ das betragsmäßig größte negative Element der Zielfunktionszeile ist und $2 = \frac{4}{2} < \frac{3}{1} < \frac{4}{1}$ ist, ist $a_{14} = 2$ das Pivotelement im ersten Schritt. Durch Austausch der Basisvariable $y_1$ gegen die Nicht-Basisvariable $x_4'$ erhält man als neues Tableau

| | $x_1$ | $x_2'$ | $x_3$ | $x_4'$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_4'$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | 2 |
| $y_2$ | $\frac{1}{2}$ | -1 | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | 1 | 0 | 1 |
| $y_3$ | $-\frac{1}{2}$ | -2 | $\frac{7}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | 0 | 1 | 2 |
| | $\frac{1}{2}$ | 2 | $\frac{9}{2}$ | 0 | $\frac{17}{2}$ | 0 | 0 | 34. |

In diesem Tableau stehen in der Zielfunktionszeile nur nichtnegative Elemente, d.h. der Algorithmus endet hier.
Wir lesen ab: Der optimale Wert des gegebenen Problems wird für

$$x_1 = 0,\ x_2' = 0,\ x_3 = 0,\ x_4' = 2$$

erreicht. Wir rücksubstituieren $x_2'$ und $x_4'$ und erhalten als Maximalstelle und als maximalen Wert der Zielfunktion

$$Z(x_1, x_2, x_3, x_4) = Z(0, -2, 0, -2) = (-2) \cdot (-2) - 17 \cdot (-2) + 15 = 53.$$

**Aufgabe 4 (4 Punkte) Lösungsvorschlag: a)** Für die Näherung mit Hilfe der zusammengesetzten Trapezregel zur Schrittweite $h = \frac{1}{2}$ gilt

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} (6x^2 - 4e^x + 1)\, dx \\
&\quad \approx \frac{1}{4}((6 - \frac{4}{e} + 1) + 2(6 \cdot \frac{1}{4} - 4e^{-1/2} + 1) + 2(-4 + 1) + 2(6 \cdot \frac{1}{4} - 4e^{1/2} + 1) + (6 - 4e + 1)) \\
&\quad = \frac{1}{4}(18 - \frac{4}{e} - 8e^{-1/2} - 8e^{1/2} - 4e) \\
&\quad = -3.096\ldots
\end{aligned}$$

**b)** Für den Fehler $R_h(f)$ bei der zusammengesetzten Trapezregel gilt

$$R_h(f) = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\eta) = -\frac{1}{6} h^2 (12 - 4e^\eta) = -h^2(2 - \frac{2}{3} e^\eta)\,,$$

wobei $\eta \in [-1, 1]$ . Die Funktion $(2 - \frac{2}{3}e^\eta)$ auf $[-1, 1]$ hat Maximum für $\eta = -1$. Daraus folgt, dass $|R_h(f)| \leq (2 - \frac{2}{3}e^{-1})h^2 \leq 1.633h^2$ . Für $h < 0.78 \cdot 10^{-4}$ gilt $|R_h(f)| < 10^{-8}$ .

**Aufgabe 5 (4 Punkte) Lösungsvorschlag :** Das Finite-Differenzen-Schema für das gegebene Randwertproblem mit $h = \frac{4-0}{4} = 1$ und $x_i = i \cdot h, i = 1, \ldots, 3$ lautet

$$\begin{aligned}
&\underbrace{\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}}_{\approx y''(x_i)} + \underbrace{y_i}_{\approx y(x_i)} = x_i + 1, \quad i = 1, \ldots, 3, \\
\iff \quad & y_{i-1} + (h^2 - 2)y_i + y_{i+1} = h^2(x_i + 1), \quad i = 1, \ldots, 3.
\end{aligned}$$

Die Randbedinungen implizieren $y_0 = y(0) = -1$ und $y_4 = y(4) = 15$.
Daraus ergibt sich das folgende System linearer Gleichungen

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Auflösen dieses Systems liefert

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 3, \quad y_3 = 8,$$

d.h. $y(2) \approx y_2 = 3$.

**Aufgabe 6 (4 Punkte) Lösungsvorschlag:**

**a)** Für

$$F(x) = 8x^3 - 4x - 100,$$

gilt

$$\begin{aligned} F(2) &= -44 < 0, \\ F(2.5) &= 15 > 0. \end{aligned}$$

Da $F$ stetig ist, besitzt $F$ nach dem Zwischenwertsatz mindestens eine Nullstelle im Intervall $(2, 2.5)$.

**b)** Es ist

$$F'(x) = 24x^2 - 4, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Das Newton-Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle von $F$ lautet also

$$x^{k+1} = x^k - \frac{F(x^k)}{F'(x^k)} = x^k - \frac{8(x^k)^3 - 4x^k - 100}{24(x^k)^2 - 4}.$$

Mit dem Startwert $x^0 = 2$ erhalten wir

$$x^1 = 2 - \frac{8 \cdot 2^3 - 4 \cdot 2 - 100}{24 \cdot 2^2 - 4} = 2 + \frac{44}{92} \approx 2.4782,$$
$$x^2 = 2.4782 - \frac{8 \cdot 2.4782^3 - 4 \cdot 2.4782 - 100}{24 \cdot 2.4782^2 - 4} \approx 2.3958.$$

**c)** Nach $(a)$ gilt $x^* \in (2, 2.5)$. Somit ist $|x^* - x^0| \leq 0.5$. Ferner gelten für $x \in (2,3)$ die Abschätzungen

$$|F'(x)| = 24x^2 - 2 \geq F'(2) = 92 =: \alpha$$

und

$$|F''(x)| = 48x \leq F''(3) = 96 =: \beta.$$

Heraus erhalten wir nach der Satz 5.1 der Vorlesung

$$\left|x^1 - x^*\right| \leq \frac{\beta}{2\alpha} \cdot \left|x^0 - x^*\right|^2 \leq \frac{48}{92} \cdot \left|x^0 - x^*\right|^2$$

und damit $x^1 \in (2,3)$. Mit der vollständigen Induktion kann man nun zeigen, dass für alle $k$ $x^k \in (2,3)$ gilt und dass

$$\left|x^{k+1} - x^*\right| \leq \frac{\beta}{2\alpha} \cdot \left|x^k - x^*\right|^2 \leq \frac{48}{92} \cdot \left|x^k - x^*\right|^2 .$$

Da $x^* \in (2, 2.5)$ folgt $|x^* - x^0| \leq 0.5$. Also gilt $|x^* - x_0| \leq 0.5 < \frac{2\alpha}{\beta} = \frac{92}{48}$. Wieder nach Satz 5.1 konvergiert das Newton-Verfahren mit Startwert $x^0 = 2$ gegen $x^*$.