Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. S. Wugalter

Herbst 2017
06.09.2017

MODULPRÜFUNG Numerische Methoden (Elektrotechnik, Meteorologie, Geodäsie und Geoinformatik)

Aufgabe 1 **(4 Punkte) Lösungsvorschlag:** Um eine Cholesky-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & -6 & 12 \\ 3 & 26 & -7 & -11 \\ -6 & -7 & 9 & 7 \\ 12 & -11 & 7 & 65 \end{pmatrix}$$

zu bestimmen, führen wir den Gauß-Algorithmus symmetrisch durch. Da A symmetrisch und positiv definit ist, werden keine Zeilenvertauschungen benötigt.

Wir setzen $A^{(1)} := A$. Um die Nichtdiagonalelemente der ersten Spalte zu eliminieren, multiplizieren wir $A^{(1)}$ von links mit der elementaren unteren Dreiecksmatrix

$$L_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{3} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Multiplikation von rechts mit der Matrix L_1^H führt aufgrund der Symmetrie von A zur Elimination der Nichtdiagonalelemente der ersten Zeile. Insgesamt erhalten wir also

$$\begin{aligned} A^{(2)} := L_1 A^{(1)} L_1^H &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{3} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 3 & -6 & 12 \\ 3 & 26 & -7 & -11 \\ -6 & -7 & 9 & 7 \\ 12 & -11 & 7 & 65 \end{pmatrix} L_1^H \\ &= \begin{pmatrix} 9 & 3 & -6 & 12 \\ 0 & 25 & -5 & -15 \\ 0 & -5 & 5 & 15 \\ 0 & -15 & 15 & 49 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & -5 & -15 \\ 0 & -5 & 5 & 15 \\ 0 & -15 & 15 & 49 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir eliminieren im zweiten Schritt die Nichtdiagonalelemente der zweiten Zeile und Spalte und setzen dazu

$$L_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} A^{(3)} := L_2 A^{(2)} L_2^H &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & -5 & -15 \\ 0 & -5 & 5 & 15 \\ 0 & -15 & 15 & 49 \end{pmatrix} L_2^H \\ &= \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & -5 & -15 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 12 & 40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 12 & 40 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Um im letzten Schritt die Nichtdiagonalelemente der dritten Zeile und Spalte zu eliminieren, setzen wir

$$L_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

und erhalten schließlich die Diagonalmatrix

$$A^{(4)} := L_3 A^{(3)} L_3^H = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Wir setzen nun $D := A^{(4)}$. Dann ist

$$\sqrt{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und wir erhalten insgesamt die Darstellung

$$A = L_1^{-1} L_2^{-1} L_3^{-1} \sqrt{D}\sqrt{D} (L_3^H)^{-1} (L_2^H)^{-1} (L_1^H)^{-1}.$$

Da es sich bei den Matrizen L_1, L_2 und L_3 um elementare untere Dreiecksmatrizen handelt, lässt sich deren Inverse durch Umkehrung der Vorzeichen unterhalb der Diagonalen berechnen. Folglich gilt

$$L := L_1^{-1} L_2^{-1} L_3^{-1} \sqrt{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{5} & 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{3}{5} & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Cholesky-Zerlegung von A ist somit gegeben durch $A = LL^H$.

Wir bestimmen nun die Lösung des linearen Gleichungssystems $LL^H x = Ax = b$ mit $b = \begin{pmatrix} 6 \\ 32 \\ 6 \\ 46 \end{pmatrix}$, indem wir das gestaffelte System

$$\begin{aligned} Ly &= b \\ L^H x &= y \end{aligned}$$

lösen. Dazu bestimmen wir zunächst y durch Vorwärtseinsetzen. Es gilt

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{3} \cdot 6 = 2 \\ y_2 &= \frac{1}{5}(32 - 1 \cdot 2) = 6 \\ y_3 &= \frac{1}{2}(6 - (-2) \cdot 2 - (-1) \cdot 6) = 8 \\ y_4 &= \frac{1}{2}(46 - 4 \cdot 2 - (-3) \cdot 6 - 6 \cdot 8) = 4, \end{aligned}$$

also $y = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$. Durch anschließendes Rückwärtseinsetzen in der zweiten Gleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} x_4 &= \frac{1}{2} \cdot 4 = 2 \\ x_3 &= \frac{1}{2}(8 - 6 \cdot 2) \\ x_2 &= \frac{1}{5}(6 - (-3) \cdot 2 - (-1) \cdot (-2)) = 2 \\ x_1 &= \frac{1}{3}(2 - 4 \cdot 2 - (-2) \cdot (-2) - 1 \cdot 2) = -4. \end{aligned}$$

Folglich ist die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ gegeben durch $x = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2 (4 Punkte) Lösungsvorschlag:

a) Die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$$

ist eine elementare untere Dreiecksmatrix, deswegen lässt sich die Inverse B^{-1} einfach berechnen (vgl. Skript, Aufgabe 1.4). Es ist

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ -1 & 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

Bezüglich der Maximumnorm gilt

$$\|B\|_\infty = \max_{i=1,\dots,5} \sum_{j=1}^{5} |b_{ij}| = \max\{1, 2, \dots, 2\} = 2$$

und

$$\|B^{-1}\|_\infty = \max\{1, 2, \dots, 2\} = 2,$$

also $\mathrm{cond}_\infty(B) = \|B\|_\infty \|B^{-1}\|_\infty = 4$.

b) Nach Resultat 4.2 der Vorlesung lässt sich die Fehlerfortpflanzung bei einer Störung der rechten Seite des linearen Gleichungssystems folgendermaßen abschätzen. Bezeichnet $x + \Delta x$ die Lösung des gestörten Gleichungssystems $B(x + \Delta x) = b + \Delta b$, so gilt für den relativen Fehler der Lösung bezüglich der Maximumnorm die Abschätzung

$$\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \mathrm{cond}_\infty(B) \cdot \frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = 4 \times \frac{10^{-3}}{5} = 8 \times 10^{-4}.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte) Lösungsvorschlag:

a) Wir bestimmen den maximalen Wert von $Z(x_1, x_2, x_3)$ mit Hilfe des Simplex-Algorithmus. Um das gegebene Optimierungsproblem in ein Standardmodell zu überführen, substituieren wir $x_1' = -x_1$ und $x_3' = x_3 + 2$. Außerdem multiplizieren wir die zweite Nebenbedingung mit (-1), damit das Standardmodell in Normalform vorliegt. Dann ist das gegebene Problem äquivalent zu

$$Z(x_1', x_2, x_3', x_4) = 17x_1' - 13x_2 - 2x_3' + 8x_4 + 12$$

mit den Nebenbedingungen

$$\begin{cases} 2x_1' - x_2 + x_4 \leq 4 \\ x_1' - x_3' + x_4 \leq 3 \\ x_1' + 3x_2 - 2x_3' \leq 4 \\ x_1', x_2, x_3', x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Das Ausgangstableau des Simplex-Algorithmus lautet also

	x_1'	x_2	x_3'	x_4	y_1	y_2	y_3	
y_1	2	-1	0	1	1	0	0	4
y_2	1	0	-1	1	0	1	0	3
y_3	1	3	-2	0	0	0	1	4
	-17	13	2	-8	0	0	0	0.

Da -17 das betragsmäßig größte negative Element der Zielfunktionszeile ist und $2 = \frac{4}{2} < \frac{3}{1} < \frac{4}{1}$ ist, ist $a_{11} = 2$ das Pivotelement im ersten Schritt. Durch Austausch der Basisvariable y_1 gegen die Nicht-Basisvariable x_1' erhält man als neues Tableau

	x_1'	x_2	x_3'	x_4	y_1	y_2	y_3	
x_1'	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	2
y_2	0	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	1
y_3	0	$\frac{7}{2}$	-2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	2
	0	$\frac{9}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{17}{2}$	0	0	34.

In diesem Tableau stehen in der Zielfunktionszeile nur nichtnegative Elemente, d.h. der Algorithmus endet hier.
Wir lesen ab: Der optimale Wert des gegebenen Problems wird für

$$x_1' = 2,\ x_2 = 0,\ x_3' = 0,\ x_4 = 0$$

erreicht. Wir rücksubstituieren x_1' und x_3' und erhalten als Maximalstelle und als maximalen Wert der Zielfunktion

$$Z(x_1, x_2, x_3, x_4) = Z(-2, 0, -2, 0) = (-2) \cdot (-17) - 13 \cdot 0 - 2 \cdot (-2) + 8 \cdot 0 + 8 = 46.$$

b) Führt man den Simplex-Algorithmus mit der Zielfunktion $\tilde{Z}$ und obigen Nebenbedingungen durch, so unterscheiden sich das Ausgangstableau und das zweite Tableau von den in a) aufgestellten Tableaus nur in der Zielfunktionszeile im dritten Eintrag. Dort wird der Eintrag 2 durch -2 ersetzt. Nun steht in der Zielfunktionszeile also noch ein negativer Eintrag, der Simplexalgorithmus ist noch nicht beendet. Die Pivotspalte im nächsten Schritt ist die dritte Spalte. Da dort alle Einträge nichtpositiv sind, bricht der Simplex-Algorithmus ab. Der Simplex-Algorithmus bricht genau dann ab, wenn das Optimierungsproblem keine Lösung besitzt, folglich existiert in diesem Fall kein maximaler Wert.

Aufgabe 4 **(4 Punkte) Lösungsvorschlag: a)** Die Simpsonregel zur Näherung von $\int_0^1 f(x)\,dx$ lautet

$$\frac{1}{6}\Big(f(0) + 4f\big(\frac{1}{2}\big) + f(1)\Big).$$

In der Aufgabe ist $f(x) = xe^x$ für $x \in [0,1]$, also lautet der Näherungswert für $\int_0^1 xe^x\,dx$ mithilfe der Simpsonregel

$$\frac{1}{6}\Big(0 \cdot e^0 + 4 \cdot \frac{1}{2}e^{1/2} + 1 \cdot e\Big) = \frac{2\sqrt{e}+e}{6} \approx 1.002620728.$$

Der exakte Wert ergibt sich z.B. durch partielle Integration als

$$\int_0^1 xe^x\,dx = \Big[xe^x - e^x\Big]_0^1 = 1,$$

so dass der Fehler $\approx 2.621 \cdot 10^{-3}$ ist.

b) $\int_{-1}^1 f(x)\,dx = \frac{2}{3}(f(\alpha) + f(\frac{\alpha+\beta}{2}) + f(\beta))$ für alle quadratischen Polynome $f(x) = ax^2 + bx + c$ genau dann, wenn dies für $f(x) = 1$, $f(x) = x$ und $f(x) = x^2$ gilt.

Die Formel ist für $f(x) = 1$ immer exakt. Exaktheit für $f(x) = x$ führt auf $0 = \frac{2}{3}(\alpha + \frac{\alpha+\beta}{2} + \beta)$, also auf $\beta = -\alpha$. Verwenden wir dies, so führt Exaktheit für $f(x) = x^2$ auf $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}(\alpha^2 + \alpha^2)$, also auf $\alpha^2 = 1/2$, $\alpha = \pm 1/\sqrt{2}$. Die geforderte Exaktheit erhalten wir also mit

$$\{\alpha, \beta\} = \{-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\}.$$

Aufgabe 5 (4 Punkte) Lösungsvorschlag :

a) Das Halbschrittverfahren zum Anfangswertproblem lautet

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hf(x_n, y_n)\right), \quad y_0 = -4.$$

Wir erhalten für die Schrittweite $h = \frac{1}{4}$

$$y_1 = -4 + \frac{1}{4}f\left(0 + \frac{1}{8}, -4 + \frac{1}{8}f(0,-4)\right) = -4 + \frac{1}{4}f\left(\frac{1}{8}, -2\right) = -3,$$

$$y(\frac{1}{2}) = y_2 = -3 + \frac{1}{4}f\left(\frac{3}{8}, -3 + \frac{1}{8}f\left(\frac{1}{4}, 3\right)\right) \approx 2.121.$$

Mit Hilfe des Halbschrittverfahrens ergibt sich also die Näherung $y(\frac{1}{2}) \approx 2.121$.

b) Für das Halbschrittverfahren gilt

$$\Phi(x_n, y_n, 0) = f\left(x_n + \frac{1}{2} \cdot 0,\ y_n + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot f(x_n, y_n)\right) = f(x_n, y_n).$$

Laut Kapitel 7.4 der Vorlesung das Verfahren ist konsistent.

Aufgabe 6 (4 Punkte) Lösungsvorschlag: a)

a) Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x^3 - x\ln x - 90, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Durch Einsetzen erhält man $f(4) < 64 - 90 < 0$ und $f(5) > 125 - 5 \cdot 2 - 90 > 0$. Da f stetig ist, besitzt f nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle im Intervall $(4,5)$.

b) Es ist $f'(x) = 3x^2 - \ln x - 1, \quad x \in \mathbb{R}$.

Das Newton-Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle von f lautet also

$$\begin{aligned} x^{m+1} &= x^m - \frac{f(x^m)}{f'(x^m)} \\ &= x^m - \frac{(x^m)^3 - (x^m)\ln(x^m) - 90}{3(x^m)^2 - \ln(x^m) - 1}, \quad m = 0,1,2,\ldots \end{aligned}$$

Für den Startwert $x^0 = 4$ erhält man

$$\begin{aligned} x^1 &\approx 4.691 \\ x^2 &\approx 4.597 \end{aligned}$$

c) Nach a) gilt $x^* \in (4,5)$, somit ist $(x^*-1, x^*+1) \subseteq (3,6)$. Außerdem ist $x^0 = 4$ Ferner gelten für $x \in (4,6)$ die Abschätzungen

$$\left|f'(x)\right| = \left|3x^2 - \ln x - 1\right| > 48 - 2 - 1 = 45$$

und

$$\left|f''(x)\right| = \left|6x - \frac{1}{x}\right| < 36.$$

Hieraus erhalten wir nach Satz 5.1 der Vorlesung

$$\left|x^{m+1} - x^*\right| \leq \frac{\left|6x - \frac{1}{x}\right|}{2\left|3x^2 - \ln x - 1\right|} \left|x^m - x^*\right|^2 < \frac{18}{45} \left|x^m - x^*\right|^2 = \frac{2}{5} \left|x^m - x^*\right|^2 \tag{1}$$

für alle $x^m \in (x^*-1, x^*+1)$, $x^m \geq 4$. Insbesondere folgt aus (1), dass

$$\left|x^{m+1} - x^*\right| \leq \frac{2}{5} 1^2 < 1,$$

d.h. es ist $x^{m+1} \in (x^*-1, x^*+1)$, falls auch $x^m \in (x^*-1, x^*+1)$ ist und $x^{m+1} \geq 4$.

Die Konvergenz des Newton-Verfahrens zum Startwert $x^0 = 4$ folgt aus der Ungleichung

$$\left|x^{m+1} - x^*\right| \leq \frac{2}{5} \left|x^m - x^*\right| \quad m = 0, 1, 2...$$