Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. S. Wugalter

Herbst 2017
06.09.2017

MODULPRÜFUNG Numerische Methoden (Elektrotechnik, Meteorologie, Geodäsie und Geoinformatik)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Cholesky-Zerlegung $A = LL^H$ der symmetrischen, positiv definiten Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & -6 & 12 \\ 3 & 26 & -7 & -11 \\ -6 & -7 & 9 & 7 \\ 12 & -11 & 7 & 65 \end{pmatrix}$$

und lösen Sie anschließend das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b = \begin{pmatrix} 6 \\ 32 \\ 6 \\ 46 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei $B \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ definiert durch

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen $\operatorname{cond}_\infty(B)$.

b) Wir betrachten das lineare Gleichungssystem $Bx = b$ mit

$$b := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Es sei $b + \Delta b$ eine Störung der rechten Seite. Geben Sie eine obere Schranke für den relativen Fehler (gemessen in der Maximumnorm) der Lösung an, falls für den absoluten Fehler der Störung $\|\Delta b\|_\infty < 10^{-3}$ gilt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Gegeben sei die Zielfunktion $Z(x_1, x_2, x_3, x_4) := -17x_1 - 13x_2 - 2x_3 + 8x_4 + 8$ unter den Nebenbedingungen

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_4 \le 4 \\ x_1 + x_3 - x_4 \ge -5 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 \le 8 \\ x_1 \le 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge -2,\ x_4 \ge 0. \end{cases}$$

a) Geben Sie $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ an, für welche die Zielfunktion $Z(x_1, x_2, x_3, x_4)$ unter obigen Nebenbedingungen maximal ist. Geben Sie außerdem den maximalen Wert der Zielfunktion an.

b) Begründen Sie anhand des in a) aufgestellten Tableaus, warum die Zielfunktion $\tilde{Z}(x_1, x_2, x_3, x_4) := -17x_1 - 13x_2 + 2x_3 + 8x_4 + 8$ unter obigen Nebenbedingungen keinen maximalen Wert hat.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

a) Berechnen Sie mit Hilfe der Simpsonregel eine Näherung für

$$\int_0^1 x \cdot \exp x \, dx.$$

b) Finden Sie $\alpha, \beta \in [-1, 1]$ so, dass die Näherungsformel $\frac{2}{3}(f(\alpha) + f(\frac{\alpha+\beta}{2}) + f(\beta))$ für das Integral $\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$ exakt ist für alle quadratischen Polynome.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(x) = y(x)^2, \qquad y(0) = -4.$$

a) Berechnen Sie mit Hilfe des Halbschrittverfahrens zur Schrittweite $h = \frac{1}{4}$ einen Näherungswert für $y(\frac{1}{2})$.

b) Zeigen Sie, dass Halbschrittverfahren konsistent ist.

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$F(x) = x^3 - x \ln x - 90, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Die Iterierten des zugehörigen Newton-Verfahrens im Schritt k seien mit x^k bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass F mindestens eine Nullstelle $x^* \in (4, 5)$ besitzt.

b) Formulieren Sie das Newton-Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle von F und führen Sie zwei Iterationen zum Startwert $x^0 = 4$ durch.

c) **(i)** Zeigen Sie die Ungleichung

$$\left|x^{k+1} - x^*\right| \le \frac{2}{5} \cdot \left|x^k - x^*\right|^2 \qquad \text{für } x^k \in (x^* - 1, x^* + 1).$$

(ii) Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren mit Startvektor x^0 gegen x^* konvergiert.

Nach der Klausur:
Die Klausurergebnisse hängen ab Montag, dem 16 .10.2017, am Schwarzen Brett neben Zimmer 2.027 (Kollegiengebäude Mathematik 20.30) aus.
Die **Klausureinsicht** findet am Montag, den 23.10.2017, 17.30-18.30 Uhr im Raum 1.067 (Kollegiengebäude Mathematik 20.30) statt.