Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. S. Wugalter

Frühjahr 2018
12.03.2018

MODULPRÜFUNG Numerische Methoden (Elektrotechnik, Meteorologie, Geodäsie und Geoinformatik)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Gegeben seien

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 10 \\ 2 & 2 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie eine Permutationsmatrix $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, eine untere Dreiecksmatrix mit normierter Diagonale $L \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und eine obere Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ so, dass gilt

$$PA = LR.$$

Achten Sie dabei auf eine geeignete Pivotisierung.

b) Lösen Sie mit Hilfe dieser Matrizen das lineare Gleichungssystem $Ax = b$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad A^{-1} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Konditionzahl $cond_1(A)$ der Matrix A bezüglich der Spaltensummennorm.

b) Wir betrachten das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$b := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Es sei $b + \Delta b$ eine Störung der rechten Seite. Geben Sie eine obere Schranke für den relativen Fehler (gemessen in der Spaltensummennorm) der Lösung an, falls für den absoluten Fehler der Störung $\|\Delta b\|_1 < 10^{-3}$ gilt.

c) Führen Sie mit der Matrix A und dem Startvektor $x^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ die ersten zwei Schritte der von-Mises Iteration durch. Geben Sie die im zweiten Schritt berechnete Näherung an den betragsgrösten Eigenwert von A an.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Gegeben sei die Zielfunktion $Z(x_1, x_2, x_3, x_4) := 8x_1 - 2x_2 - 13x_3 - 17x_4 + 15$ unter den Nebenbedingungen

$$\begin{cases} x_4 + x_2 - x_1 \geq -5 \\ -x_4 + 3x_3 - 2x_2 \leq 8 \\ x_1 - x_3 - 2x_4 \leq 4 \\ x_1 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_2 \geq -2,\ x_4 \leq 0. \end{cases}$$

Geben Sie $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ an, für welche die Zielfunktion $Z(x_1, x_2, x_3, x_4)$ unter obigen Nebenbedingungen maximal ist. Geben Sie außerdem den maximalen Wert der Zielfunktion an.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

a) Berechnen Sie mit Hilfe der zusammengesetzten Trapezregel zur Intervalllänge $h = \frac{1}{2}$ eine Näherung für

$$\int_{-1}^{1} (6x^2 - 4e^x + 1)\, dx.$$

b) Wie groß ist h zu wählen, um zu garantieren, dass der Approximationsfehler betragsmäßig kleiner 10^{-8} ist. Leiten Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5 (4 Punkte) Berechnen Sie eine Näherung für $y(2)$ der Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} y''(x) + y(x) &= x^2 + 1 \quad x \in (0, 4), \\ y(0) = -1, &\quad y(4) = 15 \end{aligned}$$

mithilfe des Finite-Differenzen-Verfahrens mit den Stützstellen $x_i = i$ für $i = 0, 1, \ldots, 4$.

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$F(x) = 8x^3 - 4x - 100, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Die Iterierten des zugehörigen Newton-Verfahrens im Schritt k seien mit x^k bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass F mindestens eine Nullstelle $x^* \in (2, 2.5)$ besitzt.

b) Formulieren Sie das Newton-Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle von F und führen Sie zwei Iterationen zum Startwert $x^0 = 2$ durch.

c) Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren mit Startvektor x^0 gegen x^* konvergiert.

Nach der Klausur:

Die Klausurergebnisse hängen ab Montag, dem 16 .04.2018, am Schwarzen Brett neben Zimmer 2.027 (Kollegiengebäude Mathematik 20.30) aus.

Die **Klausureinsicht** findet am Mittwoch, den 18.04.2018, 17.30-18.30 Uhr im Raum 2.066 (Kollegiengebäude Mathematik 20.30) statt.