Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. S. Wugalter

SS 2017

Numerische Methoden

(Elektrotechnik, Meteorologie, Geodäsie und Geoinformatik)

Lösungsvorschläge zum 1. Übungsblatt

Aufgabe 1

Wir lösen das gegebene lineare Gleichungssystem mit Hilfe des Gauß-Algorithmus mit Spaltenpivotisierung (Algorithmus 1.6 der Vorlesung).
Wegen $4 = |a_{31}| = \max_{1 \leqslant i \leqslant 4} |a_{i1}|$ ist a_{31} das Pivot-Element der ersten Spalte. Wir vertauschen deshalb zunächst die dritte mit der ersten Zeile und erhalten

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 3 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \rightsquigarrow \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} | \cdot \frac{1}{4} \\ + \\ \\ \\ \end{array}$$

Zur Elimination aller Elemente der ersten Spalte unterhalb der Diagonalen multiplizieren wir die erste Zeile mit $-\frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{1}{4}$ und addieren diese zur zweiten Zeile. Die anschließende Spalten-Pivot-Suche bezüglich der zweiten Spalte führt zur Vertauschung der zweiten mit der vierten Zeile (Vertauschung der zweiten und dritten Zeile wäre hier auch möglich). Dies führt auf

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{4} & \frac{15}{4} & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \rightsquigarrow \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{4} & \frac{15}{4} & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ | \cdot (-1) \quad | \cdot (-\frac{1}{4}) \\ + \\ + \end{array}$$

Im nächsten Eliminationsschritt wird die zweite Zeile mit $-\frac{a_{32}}{a_{22}} = -1$ multipliziert und zur dritten Zeile addiert und anschließend die zweite Zeile mit $-\frac{a_{42}}{a_{22}} = -\frac{1}{4}$ multipliziert und zur vierten Zeile addiert. Dies liefert

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{15}{4} & \frac{7}{4} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ | \cdot (-\frac{1}{2}) \\ + \end{array}$$

Im dritten Schritt ist keine Zeilenvertauschung zur Pivotisierung notwendig. Wir erhalten durch Multiplikation der dritten Zeile mit $-\frac{a_{43}}{a_{33}} = -\frac{1}{2}$ und anschließender Addition zur vierten Zeile

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} & \frac{7}{4} \end{array}\right)$$

An dieser Stelle endet der Gauß-Algorithmus. Das in der Aufgabenstellung gegebene lineare Gleichungssystem ist äquivalent zu $A^{(4)}x = b^{(4)}$ mit

$$A^{(4)} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} \end{pmatrix}, \qquad b^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix}.$$

Da $A^{(4)}$ eine obere Dreiecksmatrix ist, erhält man durch Rücksubstitution

$$\begin{aligned} x_4 &= \frac{4}{5} \cdot \frac{7}{4} = \frac{7}{5}, \\ x_3 &= \frac{1}{2}(0 - 5 \cdot \frac{7}{5}) = -\frac{7}{2}, \\ x_2 &= 1(1 - 1 \cdot (-\frac{7}{2}) - 0 \cdot \frac{7}{5}) = \frac{9}{2}, \\ x_1 &= \frac{1}{4}(0 - 1 \cdot \frac{9}{2} - 1 \cdot (-\frac{7}{2}) - (-1)\frac{7}{5}) = \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

Folglich ist die Lösung des linearen Gleichungssystems gegeben durch $x = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{9}{2} \\ -\frac{7}{2} \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2

Um die LR-Zerlegung mit Spaltenpivotisierung der Matrix A zu erhalten, führen wir wie in Aufgabe 1 den Algorithmus 1.6 der Vorlesung durch, notieren dabei jedoch die auftretenden Permutationsmatrizen P_ν und die elementaren unteren Dreiecksmatrizen L_ν, $\nu = 1, 2, 3$.
Wir setzen zu Beginn $A^{(1)} := A$.

1. Schritt: (i) Spaltenpivotisierung: Wegen $3 = |a_{21}^{(1)}| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant 4} |a_{i1}^{(1)}|$ wird die erste mit der zweiten Zeile vertauscht. Dies leistet die Permutationsmatrix

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

durch Linksmultiplikation von $A^{(1)}$ mit dieser Permutationsmatrix erhalten wir also

$$\tilde{A}^{(1)} := P_1 A^{(1)} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) Eliminationsprozess: Für $i = 2, 3, 4$ setzen wir $l_{i1} = \frac{\tilde{a}_{i1}^{(1)}}{\tilde{a}_{11}^{(1)}}$ und

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ -l_{31} & 0 & 1 & 0 \\ -l_{41} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Linksmultiplikation von $\tilde{A}^{(1)}$ mit L_1 bewirkt gerade die Elimination der Elemente der ersten Spalte unterhalb der Diagonalen, es ist

$$A^{(2)} := L_1 \tilde{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{10}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

2. Schritt: (i) Spaltenpivotisierung: Es gilt $2 = |a_{32}^{(2)}| = \max\limits_{2 \leqslant i \leqslant 4} |a_{i2}^{(2)}|$, folglich wird die zweite mit der dritten Zeile vertauscht. Wir setzen

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und erhalten

$$\tilde{A}^{(2)} := P_2 A^{(2)} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{10}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

(ii) Eliminationsprozess: Wir setzen $l_{32} = \frac{\tilde{a}_{32}^{(2)}}{\tilde{a}_{22}^{(2)}} = \frac{1}{6}$ und $l_{42} = \frac{\tilde{a}_{42}^{(2)}}{\tilde{a}_{22}^{(2)}} = \frac{1}{3}$. Damit ergibt sich

$$A^{(3)} := L_2 \tilde{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{10}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{10}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Schritt: (i) Spaltenpivotisierung: Wegen $\frac{10}{3} = |a_{33}^{(3)}| > |a_{43}^{(3)}|$ ist $P_3 = E$ und $\tilde{A}^{(3)} := A^{(3)}$.
(ii) Eliminationsprozess: Es ist $l_{43} = \frac{\tilde{a}_{43}^{(3)}}{\tilde{a}_{33}^{(3)}} = \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{2}$ und

$$A^{(4)} := L_3 \tilde{A}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{10}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{10}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{4} \end{pmatrix}.$$

Fassen wir alle drei Schritte zusammen, so erhalten wir

$$\begin{aligned} A^{(4)} &= L_3 \tilde{A}^{(3)} = L_3 P_3 L_2 P_2 L_1 P_1 A = L_3 \underbrace{(P_3 L_2 P_3)}_{=:\tilde{L}_2} \underbrace{(P_3 P_2 L_1 P_2 P_3)}_{=:\tilde{L}_1} \underbrace{(P_3 P_2 P_1)}_{=:P} A \\ &= L_3 \tilde{L}_2 \tilde{L}_1 P A. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$PA = \underbrace{\tilde{L}_1^{-1} \tilde{L}_2^{-1} L_3^{-1}}_{=:L} \underbrace{A^{(4)}}_{=:R} = LR$$

mit

$$P = P_3 P_2 P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Außerdem ist

$$\tilde{L}_1 = P_3 P_2 L_1 P_2 P_3 = P_2 L_1 P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nach Aufgabe 1.4 der Vorlesung lässt sich die Inverse $\tilde{L}_1^{-1}$ der elementaren unteren Dreiecksmatrix $\tilde{L}_1$ durch Umkehrung der Vorzeichen in der ersten Spalte unterhalb der Diagonalen berechnen. Somit ist

$$\tilde{L}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ferner gilt $\tilde{L}_2 = P_3 L_2 P_3 = L_2$ und

$$\tilde{L}_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Somit ist

$$L = \tilde{L}_1^{-1}\tilde{L}_2^{-1}L_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Die LR-Zerlegung ist also gegeben durch $PA = LR$ mit

$$LR = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{10}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{4} \end{pmatrix}.$$