Karlsruher Institut für Technologie (KIT) SS 2017
Institut für Analysis
Dr. S. Wugalter

Numerische Methoden

(Elektrotechnik, Meteorologie, Geodäsie und Geoinformatik)

Lösungsvorschläge zum 2. Übungsblatt

Aufgabe 1

Um eine Cholesky-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & -6 & 12 \\ 3 & 26 & -7 & -11 \\ -6 & -7 & 9 & 7 \\ 12 & -11 & 7 & 65 \end{pmatrix}$$

zu bestimmen, führen wir den Gauß-Algorithmus symmetrisch durch. Da A symmetrisch und positiv definit ist, werden keine Zeilenvertauschungen benötigt.

Wir setzen $A^{(1)} := A$. Um die Nichtdiagonalelemente der ersten Spalte zu eliminieren, multiplizieren wir $A^{(1)}$ von links mit der elementaren unteren Dreiecksmatrix

$$L_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{3} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Multiplikation von rechts mit der Matrix L_1^H führt aufgrund der Symmetrie von A zur Elimination der Nichtdiagonalelemente der ersten Zeile. Insgesamt erhalten wir also

$$\begin{aligned} A^{(2)} := L_1 A^{(1)} L_1^H &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{3} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 3 & -6 & 12 \\ 3 & 26 & -7 & -11 \\ -6 & -7 & 9 & 7 \\ 12 & -11 & 7 & 65 \end{pmatrix} L_1^H \\ &= \begin{pmatrix} 9 & 3 & -6 & 12 \\ 0 & 25 & -5 & -15 \\ 0 & -5 & 5 & 15 \\ 0 & -15 & 15 & 49 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & -5 & -15 \\ 0 & -5 & 5 & 15 \\ 0 & -15 & 15 & 49 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir eliminieren im zweiten Schritt die Nichtdiagonalelemente der zweiten Zeile und Spalte und setzen dazu

$$L_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} A^{(3)} := L_2 A^{(2)} L_2^H &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & -5 & -15 \\ 0 & -5 & 5 & 15 \\ 0 & -15 & 15 & 49 \end{pmatrix} L_2^H \\ &= \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & -5 & -15 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 12 & 40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 12 & 40 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Um im letzten Schritt die Nichtdiagonalelemente der dritten Zeile und Spalte zu eliminieren, setzen wir

$$L_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

und erhalten schließlich die Diagonalmatrix

$$A^{(4)} := L_3 A^{(3)} L_3^H = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Wir setzen nun $D := A^{(4)}$. Dann ist

$$\sqrt{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und wir erhalten insgesamt die Darstellung

$$A = L_1^{-1} L_2^{-1} L_3^{-1} \sqrt{D} \sqrt{D} (L_3^H)^{-1} (L_2^H)^{-1} (L_1^H)^{-1}.$$

Da es sich bei den Matrizen L_1, L_2 und L_3 um elementare untere Dreiecksmatrizen handelt, lässt sich deren Inverse durch Umkehrung der Vorzeichen unterhalb der Diagonalen berechnen. Folglich gilt

$$L := L_1^{-1} L_2^{-1} L_3^{-1} \sqrt{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{5} & 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{3}{5} & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Cholesky-Zerlegung von A ist somit gegeben durch $A = LL^H$.

Wir bestimmen nun die Lösung des linearen Gleichungssystems $LL^H x = Ax = b$ mit $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 16 \\ 3 \\ 23 \end{pmatrix}$,

indem wir das gestaffelte System

$$\begin{aligned} Ly &= b \\ L^H x &= y \end{aligned}$$

lösen. Dazu bestimmen wir zunächst y durch Vorwärtseinsetzen. Es gilt

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{3} \cdot 3 = 1 \\ y_2 &= \frac{1}{5}(16 - 1 \cdot 1) = 3 \\ y_3 &= \frac{1}{2}(3 - (-2) \cdot 1 - (-1) \cdot 3) = 4 \\ y_4 &= \frac{1}{2}(23 - 4 \cdot 1 - (-3) \cdot 3 - 6 \cdot 4) = 2, \end{aligned}$$

also $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$. Durch anschließendes Rückwärtseinsetzen in der zweiten Gleichung erhalten wir

$$
\begin{aligned}
x_4 &= \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \\
x_3 &= \frac{1}{2}(4 - 6 \cdot 1) \\
x_2 &= \frac{1}{5}(3 - (-3) \cdot 1 - (-1) \cdot (-1)) = 1 \\
x_1 &= \frac{1}{3}(1 - 4 \cdot 1 - (-2) \cdot (-1) - 1 \cdot 1) = -2.
\end{aligned}
$$

Folglich ist die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ gegeben durch $x = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2

Gegeben ist eine symmetrische, positiv definite Matrix $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und deren Cholesky-Zerlegung $A = LL^H$ mit einer unteren Dreiecksmatrix $L = (l_{ij})_{i,j} \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Zur Bestimmung der Einträge a_{ij} für $i, j = 1, \ldots, m$ in Abhängigkeit von L berechnen wir zunächst formal das Matrixprodukt $A = LL^H$. Es gilt

$$
\begin{aligned}
A = LL^H &= \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{m1} & l_{m2} & \dots & l_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & \dots & l_{m1} \\ 0 & l_{22} & \dots & l_{m2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & l_{mm} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} l_{11}^2 & l_{11}l_{21} & \dots & l_{11}l_{m1} \\ l_{21}l_{11} & l_{21}^2 + l_{22}^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \sum_{k=1}^{m-1} l_{m-1,k}l_{mk} \\ l_{m1}l_{11} & l_{m1}l_{21} + l_{m2}l_{22} & \dots & \sum_{k=1}^{m} l_{mk}^2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Hieraus lesen wir ab: Für $i, j = 1, \ldots, m$ gilt

$$
a_{ij} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} l_{ik}l_{jk}. \tag{$*$}
$$