Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. S. Wugalter SS 2017

Numerische Methoden
(Elektrotechnik, Meteorologie, Geodäsie und Geoinformatik)

Lösungsvorschläge zum 3. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Wir führen die ersten drei Schritte der in Algorithmus 2.2 der Vorlesung beschriebenen von-Mises Iteration zum Startvektor $x^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ durch. Es gilt

$$z^1 = Ax^0 = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} x^0 = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad x^1 = \frac{z^1}{z^1_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{5}{6} \end{pmatrix},$$
$$z^2 = Ax^1 = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} x^1 = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \qquad x^2 = \frac{z^2}{z^2_2} = \begin{pmatrix} \frac{8}{9} \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$z^3 = Ax^2 = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} x^2 = \begin{pmatrix} \frac{20}{9} \\ \frac{19}{9} \end{pmatrix}, \qquad x^3 = \frac{z^3}{z^3_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{19}{20} \end{pmatrix}.$$

Dabei wurde zur Normierung der Iterierten z^k, $k = 1, 2, 3$, jeweils durch den betragsmäßig größten Eintrag im Vektor z^k dividiert.

b) Allgemein lässt sich die Inverse einer regulären Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ berechnen als

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Es ist $\det(A) = -2 \neq 0$ und somit A regulär. Folglich ist die Inverse der Matrix A gegeben durch

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Nach Algorithmus 2.4 der Vorlesung lassen sich die ersten drei Iterierten der inversen Iteration von Wielandt zum Startvektor $y^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ folgendermaßen berechnen:

$$w^1 = A^{-1}y^0 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad y^1 = \frac{w^1}{w^1_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$
$$w^2 = A^{-1}y^1 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix}, \qquad y^2 = \frac{w^2}{w^2_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix},$$
$$w^3 = A^{-1}y^2 = \begin{pmatrix} -\frac{11}{10} \\ -\frac{3}{10} \end{pmatrix}, \qquad y^3 = \frac{w^3}{w^3_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{11} \end{pmatrix}.$$

Alternativ kann auch Algorithmus 2.6 der Vorlesung verwendet werden. Dazu bestimmt man zunächst die LR-Zerlegung der Matrix A und löst dann die auftretenden Gleichungssysteme durch Rückwärtssubstitution. In unserem Fall ist die LR-Zerlegung der Matrix A gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =: LR.$$

c) Einfaches Nachrechnen zeigt, dass $Av_1 = \lambda_1 v_1$ und $Av_2 = \lambda_2 v_2$ gilt, d.h. λ_1 und λ_2 sind Eigenwerte der Matrix A mit zugehörigen Eigenvektoren v_1 bzw. v_2. Dies zeigt insbesondere, dass A zwei verschiedene Eigenwerte besitzt und somit diagonalisierbar ist.
(i) Nach Resultat 2.3 der Vorlesung wird durch die von-Mises Iteration der betragsgrößte Eigenwert von A approximiert. Genauer gilt (mit der Notation aus Resultat 2.3)

$$z_{i_k}^{k+1} \to \lambda_2 \quad \text{für } k \to \infty.$$

Mit $k = 2$ lässt sich aus Aufgabenteil a) ablesen: $i_2 = 2$, und $z_{i_k}^{k+1} = z_2^3 = \frac{19}{9}$ ist eine Näherung an den Eigenwert $\lambda_2 = 2$. Der absolute Fehler der Approximation beträgt $|z_2^3 - \lambda_2| = \frac{1}{9} = 0.111\ldots$.
Ferner liefert x^k eine Näherung an ein Vielfaches des zugehörigen Eigenvektors $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, d.h.

$$x^k - \frac{v^2}{v_{i_k}^2} \to 0 \quad \text{für } k \to \infty.$$

Mit $k = 3$ lässt sich aus a) ablesen: $i_3 = 1$ und $x^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{19}{20} \end{pmatrix}$ ist eine Näherung an den Eigenvektor $\frac{v^2}{v_1^2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Der absolute Fehler, gemessen in der Maximumnorm, beträgt

$$\|x^3 - v^2\|_\infty = \|\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{19}{20} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\|_\infty = \|\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{20} \end{pmatrix}\|_\infty = \max\{0, |-\frac{1}{20}|\} = \frac{1}{20} = 0.05.$$

(ii) Nach Resultat 2.5 liefert die inverse Iteration von Wielandt eine Approximation an den Kehrwert des betragskleinsten Eigenwerts von A. Genauer gilt hier

$$w_{i_k}^{k+1} \to \frac{1}{\lambda_1} \quad \text{für } k \to \infty.$$

Mit $k = 2$ lesen wir aus Aufgabenteil b) ab: $i_2 = 1$ und $\frac{1}{w_{i_k}^{k+1}} = \frac{1}{w_1^3} = -\frac{10}{11}$ ist eine Näherung an den Eigenwert $\lambda_1 = -1$. Der absolute Fehler der Approximation beträgt $|\frac{1}{w_1^3} - \lambda_1| = \frac{1}{11} = 0.0909\ldots$.
Außerdem liefert hier y^k eine Näherung an ein Vielfaches des zugehörigen Eigenvektors $v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, d.h.

$$y^k - \frac{v^1}{v_{i_k}^1} \to 0 \quad \text{für } k \to \infty.$$

Mit $k = 3$ können wir aus b) ablesen: $i_3 = 1$ und $y^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{11} \end{pmatrix}$ ist eine Approximation des Eigenvektors $\frac{v^1}{v_1^1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$. Der absolute Fehler, gemessen in der Maximumnorm, beträgt

$$\|y^3 - \frac{v^1}{v_1^1}\|_\infty = \|\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{44} \end{pmatrix}\|_\infty = \frac{1}{44} = 0.0227\ldots.$$