Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. S. Wugalter

SS 2017

Numerische Methoden

(Elektrotechnik, Meteorologie, Geodäsie und Geoinformatik)

Lösungsvorschläge zum 4. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Da das Optimierungsproblem bereits als Standardmodell in Normalform vorliegt, kann man direkt das Anfangstableau des Simplex-Algorithmus aufstellen. Es ist gegeben durch

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	
y_1	2	4	5	7	1	0	0	42
y_2	1	1	2	2	0	1	0	17
y_3	1	2	$\boxed{3}$	3	0	0	1	24
	-7	-9	-18	-17	0	0	0	0.

Das betragsgrößte negative Element der Zielfunktionszeile ist -18, somit ist die dritte Spalte die Pivotspalte. Das Pivotelement ist wegen $8 = \frac{24}{3} < \frac{17}{2}$ und $8 < \frac{42}{5}$ das Element $a_{33} = 3$. Wir tauschen die Basisvariable y_3 gegen x_3 aus und erzeugen durch Zeilenumformungen in der dritten Spalte den dritten Einheitsvektor. Das neue Tableau ist dann gegeben durch

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	
y_1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	2	1	0	$-\frac{5}{3}$	2
y_2	$\boxed{\frac{1}{3}}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	1	$-\frac{2}{3}$	1
x_3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	1	0	0	$\frac{1}{3}$	8
	-1	3	0	1	0	0	6	144.

Das einzige negative Element in der Zielfunktionszeile ist -1, also ist die erste Spalte die Pivotspalte. Wegen $3 = \frac{1}{1/3} < 6 < 24$ ist das Element $a_{21} = \frac{1}{3}$ das Pivotelement.
Durch Zeilenumformungen und Austausch der Basisvariable ergibt sich

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	
y_1	0	1	0	2	1	-1	-1	1
x_1	1	-1	0	0	0	3	-2	3
x_3	0	1	1	1	0	-1	1	7
	0	2	0	1	0	3	4	147.

Alle Einträge in der Zielfunktionszeile sind $\geqslant 0$, der Simplex-Algorithmus ist zu Ende.
Der optimale Wert der Zielfunktion ist

$$\begin{aligned} 147 &= 7x_1 + 9x_2 + 18x_3 + 17x_4 \\ &= 7 \cdot 3 + 9 \cdot 0 + 18 \cdot 7 + 17 \cdot 0. \end{aligned}$$

b) Zunächst muss das Problem auf Normalform gebracht werden. Wir substituieren dazu

$$\tilde{x}_1 = x_1, \quad \tilde{x}_2 = x_2, \quad \tilde{x}_3 = 2 - x_3, \quad \tilde{x}_4 = x_4 + 1$$

und erhalten das äquivalente Problem:
Maximiere $13 + \tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 - 3\tilde{x}_3 + \tilde{x}_4$ unter den Nebenbedingungen

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 - 2\tilde{x}_3 - 2\tilde{x}_4 \leqslant 2 \\ -\tilde{x}_2 - \tilde{x}_4 \leqslant 3 \\ -\tilde{x}_2 - \tilde{x}_3 + 3\tilde{x}_4 \leqslant 4 \\ \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_4 \geqslant 0. \end{cases}$$

Da $\max(13 + \tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 - 3\tilde{x}_3 + \tilde{x}_4) = 13 + \max(\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 - 3\tilde{x}_3 + \tilde{x}_4)$ gilt, können wir die Konstante bei der Berechnung zunächst weglassen.
Das Anfangstableau des Simplex-Algorithmus lautet

	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_4$	y_1	y_2	y_3	
y_1	1	$\boxed{1}$	-2	-2	1	0	0	2
y_2	0	-1	0	-1	0	1	0	3
y_3	0	-1	-1	3	0	0	1	4
	-1	-2	3	-1	0	0	0	0.

Unter den negativen Einträgen in der Zielfunktionszeile hat -2 den größten Betrag, d.h. die zweite Spalte ist Pivotspalte. Außerdem ist $a_{12} = 1$ Pivotelement, da $a_{22} < 0$ und $a_{32} < 0$ sind.
Wir tauschen die Basisvariable y_1 gegen $\tilde{x}_2$ aus, die Zeilenumformungen liefern

	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_4$	y_1	y_2	y_3	
$\tilde{x}_2$	1	1	-2	-2	1	0	0	2
y_2	1	0	-2	-3	1	1	0	5
y_3	1	0	-3	$\boxed{1}$	1	0	1	6
	1	0	-1	-5	2	0	0	4.

Hier wiederum ist die vierte Spalte die Pivotspalte und $a_{34} = 1$ ist das Pivotelement. Durch den Austausch der Basisvariable y_3 gegen $\tilde{x}_4$ erhält man

	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_4$	y_1	y_2	y_3	
$\tilde{x}_2$	3	1	-8	0	3	0	2	14
y_2	4	0	-11	0	4	1	3	23
$\tilde{x}_4$	1	0	-3	1	1	0	1	6
	6	0	-16	0	7	0	5	34.

Im nächsten Schritt wird die dritte Spalte zur Pivotspalte. Da jedoch alle Einträge in dieser Spalte negativ sind, bricht der Simplex-Algorithmus an dieser Stelle ab.
D.h. es gibt keine optimale Lösung des gegebenen Problems. Wir können $\tilde{x}_3$ beliebig groß wählen und damit wird auch die Zielfunktion beliebig groß. Setzen wir z.B. $\tilde{x}_3 := t$, so kann man aus dem Tableau ablesen, dass der Vektor

$$\tilde{x}(t) = (\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), \tilde{x}_3(t), \tilde{x}_4(t)) = (0, 14 + 8t, t, 6 + 3t)$$

für $t \geqslant 0$ zulässig ist. Der Wert der Zielfunktion ist dann

$$\begin{aligned} Z(\tilde{x}(t)) &= 13 + \tilde{x}_1(t) + 2\tilde{x}_2(t) - 3\tilde{x}_3(t) + \tilde{x}_4(t) \\ &= 13 + 28 + 16t - 3t + 6 + 3t = 47 + 16t \ \to \infty \quad \text{für } t \to \infty. \end{aligned}$$