Karlsruher Institut für Technologie (KIT) SS 2017
Institut für Analysis
Dr. S. Wugalter

Numerische Methoden

(Elektrotechnik, Meteorologie, Geodäsie und Geoinformatik)

Lösungsvorschläge zum 5. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Erinnerung: Die Norm $\|\cdot\|_1$ auf $\mathbb{C}^m$ ist definiert durch

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^m |x_i|, \qquad x = (x_i)_i \in \mathbb{C}^m.$$

Es seien $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathbb{C}^{m\times m}$ und $x \in \mathbb{C}^m$. Dann gilt aufgrund der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}\|Ax\|_1 &= \sum_{i=1}^m |(Ax)_i| = \sum_{i=1}^m \Big|\sum_{j=1}^m a_{ij}x_j\Big| \leqslant \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m |a_{ij}||x_j| \\ &= \sum_{j=1}^m |x_j| \left(\sum_{i=1}^m |a_{ij}|\right) \leqslant \sum_{j=1}^m |x_j| \max_{l=1,\dots,m} \sum_{i=1}^m |a_{il}| = \|x\|_1 \max_{l=1,\dots,m} \sum_{i=1}^m |a_{il}|.\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Ungleichung

$$\|A\|_1 = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} \leqslant \max_{l=1,\dots,m} \sum_{i=1}^m |a_{il}|. \tag{1}$$

Um zu zeigen, dass in (1) sogar Gleichheit gilt, wählen wir ein $l_0 \in \{1,\dots,m\}$ so, dass

$$\sum_{i=1}^m |a_{il_0}| = \max_{l=1,\dots,m} \sum_{i=1}^m |a_{il}|.$$

Dann gilt für $\tilde{x} = e_{l_0}$ (l_0-ter Einheitsvektor) $\|\tilde{x}\|_1 = 1$ und

$$\|A\tilde{x}\|_1 = \sum_{i=1}^m \Big|\sum_{j=1}^m a_{ij}\tilde{x}_j\Big| = \sum_{i=1}^m |a_{il_0}| = \max_{l=1,\dots,m} \sum_{i=1}^m |a_{il}|.$$

Somit ist

$$\|A\|_1 = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} \geqslant \frac{\|A\tilde{x}\|_1}{\|\tilde{x}\|_1} = \max_{l=1,\dots,m} \sum_{i=1}^m |a_{il}|. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt nun die Behauptung.

b) Erinnerung: Die Norm $\|\cdot\|_2$ auf $\mathbb{C}^m$ ist definiert durch

$$\|x\|_2 := \sqrt{x^H x}, \qquad x \in \mathbb{C}^m.$$

Es sei $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$. Dann ist die Matrix $A^HA \in \mathbb{C}^{m\times m}$ hermitesch (d.h. es gilt $(A^HA)^H = A^HA$) und somit insbesondere normal. Folglich existiert eine Orthonormalbasis $(v^i)_i$ von Eigenvektoren der Matrix A^HA. Bezeichnet also v^i den zum Eigenwert λ_i gehörenden Eigenvektor aus der Orthonormalbasis $(v^i)_i$, so ist $A^HAv^i = \lambda_i v^i$ für alle $i = 1,\dots,m$ und

$(v^j)^H v^i = 0$ für $i \neq j$ und $(v^i)^H v^i = 1$. Außerdem lässt sich jedes $x \in \mathbb{C}^m$ darstellen als Linearkombination $x = \sum_{i=1}^m c_i v^i$ der Eigenvektoren mit

$$\|x\|_2^2 = x^H x = \left(\sum_{i=1}^m c_i v^i\right)^H \left(\sum_{j=1}^m c_j v^j\right) = \sum_{i,j=1}^m \bar{c}_i c_j (v^i)^H v^j = \sum_{i=1}^m |c_i|^2.$$

Ferner ist die Matrix $A^H A$ positiv semidefinit, da

$$x^H A^H A x = (Ax)^H A x = \|Ax\|_2^2 \geqslant 0 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{C}^m.$$

Dies wiederum impliziert, dass alle Eigenwerte nichtnegativ sind und sie folgendermaßen angeordnet werden können:

$$\lambda_{\max}(A^H A) = \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_m \geqslant 0.$$

Es sei nun $x = \sum_{i=1}^m c_i v^i \in \mathbb{C}^m$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}\|Ax\|_2^2 = x^H A^H A x &= \left(\sum_{i=1}^m c_i v^i\right)^H A^H A \left(\sum_{j=1}^m c_j v^j\right) = \sum_{i,j=1}^m \bar{c}_i c_j (v^i)^H A^H A v^j \\ &= \sum_{i,j=1}^m \bar{c}_i c_j (v^i)^H \lambda_j v^j = \sum_{i=1}^m |c_i|^2 \lambda_i \leqslant \lambda_1 \sum_{i=1}^m |c_i|^2 = \lambda_1 \|x\|_2^2.\end{aligned}$$

Hieraus folgt nun nach Definition von λ_1

$$\|A\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \leqslant \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{\lambda_{max}(A^H A)}. \tag{3}$$

Um zu zeigen, dass in (3) sogar Gleichheit gilt, wählen wir $\tilde{x} = v^1$ und berechnen

$$\|A\tilde{x}\|_2^2 = (Av^1)^H (Av^1) = (v^1)^H A^H A v^1 = \lambda_1 \|v^1\|_2^2.$$

Hieraus erhalten wir die Ungleichung

$$\|A\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \geqslant \frac{\|A\tilde{x}\|_2}{\|\tilde{x}\|_2} = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{\lambda_{\max}(A^H A)}. \tag{4}$$

Aus (3) und (4) folgt die Behauptung.

c) Erinnerung: Die Norm $\|\,.\,\|_\infty$ auf $\mathbb{C}^m$ ist definiert durch

$$\|x\|_\infty := \max_{i=1,\ldots,m} |x_i|, \qquad x = (x_i)_i \in \mathbb{C}^m.$$

Es seien $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathbb{C}^{m \times m}$ und $x \in \mathbb{C}^m$. Aufgrund der Dreiecksungleichung gilt

$$\begin{aligned}\|Ax\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,m} \Big|\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j\Big| &\leqslant \max_{i=1,\ldots,m} \sum_{j=1}^m |a_{ij}||x_j| \\ &\leqslant \max_{i=1,\ldots,m} \left(\max_{j=1,\ldots,m} |x_j|\right) \sum_{j=1}^m |a_{ij}| = \|x\|_\infty \max_{i=1,\ldots,m} \sum_{j=1}^m |a_{ij}|,\end{aligned}$$

woraus wiederum die Ungleichung

$$\|A\|_\infty = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leqslant \max_{i=1,\ldots,m} \sum_{j=1}^m |a_{ij}| \tag{5}$$

folgt. Um auch die umgekehrte Ungleichung zu erhalten, wählen wir ein $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$ aus mit $\sum_{j=1}^m |a_{i_0 j}| = \max_{i=1,\ldots,m} \sum_{j=1}^m |a_{ij}|$. Wir setzen

$$\tilde{x} = \left(\frac{\overline{a_{i_0 1}}}{|a_{i_0 1}|}, \ldots, \frac{\overline{a_{i_0 m}}}{|a_{i_0 m}|} \right),$$

wobei ohne Einschränkung $a_{i_0 1}, \ldots, a_{i_0 m} \neq 0$ gelten soll. Dann gilt $\|\tilde{x}\|_\infty = 1$ und

$$\begin{aligned} \|A\tilde{x}\|_\infty &= \max_{i=1,\ldots,m} |\sum_{j=1}^m a_{ij}\tilde{x}_j| = \max_{i=1,\ldots,m} |\sum_{j=1}^m a_{ij} \frac{\overline{a_{i_0 j}}}{|a_{i_0 j}|}| \\ &\geqslant |\sum_{j=1}^m a_{i_0 j} \frac{\overline{a_{i_0 j}}}{|a_{i_0 j}|}| = |\sum_{j=1}^m \frac{|a_{i_0 j}|^2}{|a_{i_0 j}|}| = \sum_{j=1}^m |a_{i_0 j}| = \max_{i=1,\ldots,m} \sum_{j=1}^m |a_{ij}|. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\|A\|_\infty = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \geqslant \frac{\|A\tilde{x}\|_\infty}{\|\tilde{x}\|_\infty} \geqslant \max_{i=1,\ldots,m} \sum_{j=1}^m |a_{ij}|. \tag{6}$$

Aus (5) und (6) folgt die Behauptung.

Aufgabe 2

a) Es sei $S \in \mathbb{C}^{m \times m}$ mit $\|S\| < 1$.
Wir zeigen, dass die Gleichung $(E + S)x = 0$ nur die Lösung $x = 0$ besitzt. Dann ist $E + S$ injektiv und somit auch invertierbar.
Angenommen, es existiert ein $x \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$, welches die Gleichung $(E+S)x = 0$ erfüllt. Dann gilt $x = -Sx$ und nach Voraussetzung an S folgt

$$\|x\| = \|Sx\| \leqslant \|S\|\|x\| < \|x\|.$$

Widerspruch. Also ist $x = 0$ die einzige Lösung der Gleichung und $E + S$ invertierbar.

b) Es sei $b \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$ beliebig gewählt. Nach a) existiert zu b eine eindeutige Lösung $x \in \mathbb{C}^m$ der Gleichung $(E + S)x = b$. Diese ist gegeben durch $x = (E + S)^{-1}b$.
Aufgrund der Dreiecksungleichung und nach Definition der Matrixnorm gilt

$$\|b\| = \|x + Sx\| \geqslant \|x\| - \|Sx\| \geqslant \|x\| - \|S\|\|x\| = \|x\|(1 - \|S\|) > 0$$

und

$$\|(E + S)^{-1}b\| = \|x\|.$$

Somit ist (da $b \in \mathbb{C}^m$ beliebig gewählt ist)

$$\begin{aligned} \|(E+S)^{-1}\| &= \sup_{b \neq 0} \frac{\|(E+S)^{-1}b\|}{\|b\|} \leqslant \sup_{b \neq 0} \frac{\|(E+S)^{-1}b\|}{(1 - \|S\|)\|x\|} \\ &= \sup_{b \neq 0} \frac{\|(E+S)^{-1}b\|}{(1 - \|S\|)\|(E+S)^{-1}b\|} = \frac{1}{1 - \|S\|}. \end{aligned}$$

Aufgabe 3

a) Die Inverse einer Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit $\det(A) = ad - bc \neq 0$ lässt sich berechnen durch

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Also ist für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ die inverse Matrix gegeben durch $A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.
Nach Definition der Konditionszahl gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{cond}_1(A) &= \|A\|_1 \|A^{-1}\|_1 = \max\{1+3, 2+7\} \cdot \max\{7+|-3|, |-2|+1\} \\ &= \max\{4, 9\} \cdot \max\{10, 3\} = 90, \\ \mathrm{cond}_\infty(A) &= \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = \max\{3, 10\} \cdot \max\{9, 4\} = 90. \end{aligned}$$

Um die Kondition $\mathrm{cond}_2(A)$ zu berechnen, berechnen wir zunächst den größten Eigenwert der Matrix $A^H A$. Es ist

$$A^H A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 23 \\ 23 & 53 \end{pmatrix}$$

und

$$\det(A^H A - \lambda E) = (10-\lambda)(53-\lambda) - 23^2 = (\lambda - \frac{63}{2})^2 - \frac{3965}{4},$$

also $\lambda_{\max}(A^H A) = \frac{63}{2} + \frac{\sqrt{3965}}{2}$ und

$$\|A\|_2 = \sqrt{\frac{63}{2} + \frac{\sqrt{3965}}{2}}.$$

Für die Inverse berechnet man entsprechend

$$(A^{-1})^H A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 & -17 \\ -17 & 5 \end{pmatrix}$$

und

$$\det((A^{-1})^H A^{-1} - \lambda E) = (58-\lambda)(5-\lambda) - 17^2 = (\lambda - \frac{63}{2})^2 - \frac{3965}{4}.$$

D.h. es ist $\|A^{-1}\|_2 = \|A\|_2$ und

$$\mathrm{cond}_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \frac{63}{2} + \frac{\sqrt{3965}}{2}.$$

b) Die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

ist eine elementare untere Dreiecksmatrix, deswegen lässt sich die Inverse B^{-1} einfach berechnen (vgl. Skript, Aufgabe 1.4). Es ist

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ -1 & 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist die Matrixnorm bezüglich $\|\,.\,\|_1$ (Spaltensummennorm) von B bzw. B^{-1} gegeben durch

$$\|B\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{n} |b_{ij}| = \max\{n, 1, \dots, 1\} = n$$

bzw.

$$\|B^{-1}\|_1 = \max\{n, 1, \dots, 1\} = n.$$

Die Kondition der Matrix B bezüglich $\|\,.\,\|_1$ ist somit $\operatorname{cond}_1(B) = \|B\|_1 \|B^{-1}\|_1 = n^2$. Bezüglich der Maximumnorm gilt

$$\|B\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| = \max\{1, 2, \ldots, 2\} = 2$$

und

$$\|B^{-1}\|_\infty = \max\{1, 2, \ldots, 2\} = 2,$$

also $\operatorname{cond}_\infty(B) = \|B\|_\infty \|B^{-1}\|_\infty = 4$.

c) Nach Resultat 4.2 der Vorlesung lässt sich die Fehlerfortpflanzung bei einer Störung der rechten Seite des linearen Gleichungssystems folgendermaßen abschätzen. Bezeichnet $x + \Delta x$ die Lösung des gestörten Gleichungssystems $C(x + \Delta x) = b + \Delta b$, so gilt für den relativen Fehler der Lösung bezüglich der Maximumnorm die Abschätzung

$$\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leqslant \operatorname{cond}_\infty(C) \cdot \frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty}.$$

Für $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ist $C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ und

$$\operatorname{cond}_\infty(C) = \|C\|_\infty \cdot \|C^{-1}\|_\infty = \max\{3, 2\} \cdot \max\{3, 2\} = 9.$$

Ferner ist $\|b\|_\infty = \max\{1, 4\} = 4$ und nach Voraussetzung $\|\Delta b\|_\infty < 10^{-3}$. Damit erhalten wir

$$\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} < 9 \cdot \frac{10^{-3}}{4} = 2.25 \cdot 10^{-3}.$$