

Numerische Methoden (Elektrotechnik, Meteorologie, Geodäsie und Geoinformatik)

5. Übungsblatt

Aufgabe 1

Es sei $p \in \{1, 2, \infty\}$. Zu den Normen $\|\cdot\|_p$ auf \mathbb{C}^m wird durch

$$\|A\|_p := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}, \quad A \in \mathbb{C}^{m \times m},$$

eine mit $\|\cdot\|_p$ verträgliche Matrixnorm definiert. Zeigen Sie die folgenden Darstellungen der Matrixnormen.

a) $\|A\|_1 = \max_{j=1, \dots, m} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$ („Spaltensummennorm“)

b) $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^H A)}$ („Spektralnrm“)

c) $\|A\|_\infty = \max_{i=1, \dots, m} \sum_{j=1}^m |a_{ij}|$ („Zeilensummennorm“)

Hierbei bezeichnet $\lambda_{\max}(A^H A)$ den größten Eigenwert der Matrix $A^H A$.

Aufgabe 2

Es bezeichne $\|\cdot\|$ eine submultiplikative Matrixnorm auf $\mathbb{C}^{m \times m}$. Es sei E die Einheitsmatrix in $\mathbb{C}^{m \times m}$ und $S \in \mathbb{C}^{m \times m}$ mit $\|S\| < 1$. Zeigen Sie:

a) Die Matrix $E + S$ ist invertierbar.

b) Es gilt

$$\|(E + S)^{-1}\| \leq \frac{\|E\|}{1 - \|S\|}.$$

Aufgabe 3

a) Berechnen Sie für $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ die Kondition der Matrix bezüglich der Spaltensummen-, der Spektral- und der Zeilensummennorm (d.h. zu berechnen sind $\text{cond}_1(A)$, $\text{cond}_2(A)$ und $\text{cond}_\infty(A)$).

b) Es sei $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definiert durch

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\text{cond}_1(B)$ und $\text{cond}_\infty(B)$.

c) Wir betrachten das lineare Gleichungssystem $Cx = b$ mit

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Es sei $b + \Delta b$ eine Störung der rechten Seite. Geben Sie eine obere Schranke für den relativen Fehler (gemessen in der Maximumnorm) der Lösung an, falls für den absoluten Fehler der Störung $\|\Delta b\|_\infty < 10^{-3}$ gilt.