Karlsruher Institut für Technologie (KIT) SS 2017
Institut für Analysis
Dr. S. Wugalter

Numerische Methoden

(Elektrotechnik, Meteorologie, Geodäsie und Geoinformatik)

Lösungsvorschläge zum 6. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \sin(x) - 0.5x - 0.1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Durch Einsetzen erhält man $f(0) = -0.1 < 0$ und $f(0.3) = 0.045520\ldots > 0.04$. Da f stetig ist, besitzt f nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle im Intervall $(0, 0.3)$.

b) Es ist $f'(x) = \cos(x) - 0.5, \quad x \in \mathbb{R}$.
Das Newton-Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle von f lautet also

$$\begin{aligned} x^{m+1} &= x^m - \frac{f(x^m)}{f'(x^m)} \\ &= x^m - \frac{\sin(x^m) - 0.5x^m - 0.1}{\cos(x^m) - 0.5}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Für den Startwert $x^0 = 0.1$ erhält man

$$\begin{aligned} x^1 &\approx 0.2013458 \\ x^2 &\approx 0.2027730 \\ x^3 &\approx 0.2027734. \end{aligned}$$

c) Nach a) gilt $x^* \in (0, 0.3)$, somit ist $(x^* - 0.2, x^* + 0.2) \subseteq (-0.2, 0.5)$. Ferner gelten für $x \in (-0.2, 0.5)$ die Abschätzungen

$$|f'(x)| = |\cos(x) - 0.5| \geqslant \cos(0.5) - 0.5$$

und

$$|f''(x)| = |-\sin(x)| \leqslant \sin(0.5).$$

Hieraus erhalten wir nach Satz 5.1 der Vorlesung

$$|x^{m+1} - x^*| \leqslant \frac{\sin(0.5)}{2(\cos(0.5) - 0.5)} |x^m - x^*|^2 < \frac{2}{3} |x^m - x^*|^2 \tag{1}$$

für alle $x^m \in (x^* - 0.2, x^* + 0.2)$. Insbesondere folgt aus (2), dass

$$|x^{m+1} - x^*| \leqslant \frac{2}{3}(0.2)^2 < 0.2,$$

d.h. es ist $x^{m+1} \in (x^* - 0.2, x^* + 0.2)$, falls auch $x^m \in (x^* - 0.2, x^* + 0.2)$ ist.

Die Konvergenz des Newton-Verfahrens zum Startwert $x^0 = 0.1$ lässt sich nun folgendermaßen begründen.
Für $x^0 = 0.1$ gilt nach a), dass $x^0 \in (x^* - 0.2, x^* + 0.2)$ ist und somit nach c)

$$x^m \in (x^* - 0.2, x^* + 0.2) \qquad \text{für alle } m = 0, 1, 2, \ldots$$

Induktiv erhält man aus (2) für $m \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
|x^m - x^*| &\leqslant \frac{2}{3}|x^{m-1} - x^*|^2 \\
&\leqslant \frac{2}{3}(\frac{2}{3}|x^{m-2} - x^*|^2)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{2^2-1} |x^{m-2} - x^*|^{2^2} \\
&\leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{2^2-1} \left(\frac{2}{3}|x^{m-3} - x^*|^2\right)^{2^2} \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^{2^3-1} |x^{m-3} - x^*|^{2^3} \\
&\leqslant \cdots \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{2^m-1} |x^0 - x^*|^{2^m} \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{2^m-1} (0.2)^{2^m}.
\end{aligned}$$

Folglich gilt $|x^m - x^*| \to 0$ für $m \to \infty$.

Aufgabe 2

Gegeben seien $a, b \in \mathbb{R},\ a \leqslant b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.
Die Trapezregel ist gegeben durch

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b - a)\frac{f(a) + f(b)}{2},$$

die zusammengesetzte Trapezregel zur Intervalllänge h ist gegeben durch

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}[f(a) + 2f(a + h) + \ldots + 2f(b - h) + f(b)]$$

und die Simpsonregel ist gegeben durch

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b - a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a + b}{2}\right) + f(b)\right).$$

a) Wir setzen $a = -1,\ b = 1$ und $f(x) = \cos(x),\ x \in \mathbb{R}$. Der exakte Wert des Integrals ist

$$\int_{-1}^1 \cos(x)\,dx = 2\sin(1) = 1.682941\ldots$$

Die Näherung mit Hilfe der Trapezregel ergibt

$$\int_{-1}^1 \cos(x)\,dx \approx (1 - (-1))\frac{\cos(-1) + \cos(1)}{2} = 2\cos(1) = 1.080604\ldots$$

Der absolute Fehler der Näherung beträgt ≈ 0.602337.
Die Näherung mit der zusammengesetzten Trapezregel ergibt

$$\int_{-1}^1 \cos(x)\,dx \approx \frac{1}{4}[\cos(-1) + 2\cos(-\frac{1}{2}) + 2\cos(0) + 2\cos(\frac{1}{2}) + \cos(1)] = 1.647733\ldots$$

Der absolute Fehler der Näherung beträgt ≈ 0.035208.
Die Näherung mit Hilfe der Simpsonregel ergibt

$$\int_{-1}^{1} \cos(x)\, dx \approx \frac{2}{6}[\cos(-1) + 4\cos(0) + \cos(1)] = 1.693534\ldots$$

Der absolute Fehler der Näherung beträgt ≈ -0.010593.

b) Wir setzen $f(x) = 3x^2 - 2e^x - 5,\ x \in \mathbb{R}$. Der Wert des Integrals ist

$$\int_{-1}^{1} (3x^2 - 2e^x - 5)\, dx = [x^3 - 2e^x - 5x]_{-1}^{1} = -8 - 2e + \frac{2}{e} = -12.700804\ldots$$

Die Näherung mit Hilfe der Trapezregel ergibt

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} (3x^2 - 2e^x - 5)\, dx &\approx \frac{2}{2}((3 - \frac{2}{e} - 5) + (3 - 2e - 5)) \\ &= -4 - \frac{2}{e} - 2e = -10.172322\ldots\end{aligned}$$

Der absolute Fehler der Näherung beträgt ≈ -2.528482.
Für die Näherung mit Hilfe der zusammengesetzten Trapezregel zur Schrittweite $h = \frac{1}{2}$ gilt

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1} (3x^2 - 2e^x - 5)\, dx \\ &\approx \frac{1}{4}((3 - \frac{2}{e} - 5) + 2(3 \cdot \frac{1}{4} - 2e^{-1/2} - 5) + 2(-2 - 5) + 2(3 \cdot \frac{1}{4} - 2e^{1/2} - 5) + (3 - 2e - 5)) \\ &= \frac{1}{4}(-35 - \frac{2}{e} - 4e^{-1/2} - 4e^{1/2} - 2e) \\ &= -12.548332\ldots\end{aligned}$$

Der absolute Fehler der Näherung beträgt ≈ -0.152472.
Die Näherung mit Hilfe der Simpsonregel ergibt

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} (3x^2 - 2e^x - 5)\, dx &\approx \frac{2}{6}((3 - \frac{2}{e} - 5) + 4(-2 - 5) + (3 - 2e - 5)) \\ &= \frac{1}{3}(-32 - \frac{2}{e} - 2e) = -12.724107\ldots\end{aligned}$$

Der absolute Fehler der Näherung beträgt ≈ 0.023303.

Aufgabe 3

a) Es sei $m \in \mathbb{N}_0$. Ist die gegebene Quadraturformel für alle Polynome aus $\mathbb{P}_m$ exakt, so ist sie insbesondere auch für die Monome $p_0, p_1, \ldots, p_m$ exakt.
Umgekehrt gilt: Ist die Quadraturformel für die Monome $p_0, p_1, \ldots, p_m$ exakt, so gilt für ein beliebiges Polynom $P(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_m x^m \in \mathbb{P}_m$

$$\begin{aligned}\int_a^b P(x)\, dx &= \sum_{i=0}^{m} c_i \int_a^b x^i\, dx = \sum_{i=0}^{m} c_i \int_a^b p_i(x)\, dx \\ &= \sum_{i=0}^{m} c_i \left(a_0 p_i(x_0) + \ldots + a_n p_i(x_n)\right) \\ &= a_0 \sum_{i=0}^{m} c_i x_0^i + \ldots + a_n \sum_{i=0}^{m} c_i x_n^i \\ &= a_0 P(x_0) + \ldots + a_n P(x_n),\end{aligned}$$

also ist die Quadraturformel auch für beliebige Polynome $P \in \mathbb{P}_m$ exakt.

b) Nach a) genügt es zu zeigen, dass die Quadraturformel für die Monome p_0, p_1, p_2 exakt ist. Setzt man diese in die gegebene Formel ein, so erhält man die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} 2 &= a_0 + a_1 + a_2 \\ 0 &= -a_0 + \frac{3}{4}a_1 + a_2 \\ \frac{2}{3} &= a_0 + \frac{9}{16}a_1 + a_2. \end{aligned}$$

Die eindeutige Lösung dieses Gleichungssystems ist

$$a_0 = \frac{13}{21}, \qquad a_1 = \frac{64}{21}, \qquad a_2 = -\frac{5}{3}.$$

Dadurch ist die Quadraturformel eindeutig bestimmt.

c) Analog zu b) setzen wir die Monome p_0, p_1, p_2, p_3 in die Quadraturformel ein. Man erhält die Gleichungen

$$2 = \frac{1}{2} + a_1 + a_2 \tag{2}$$

$$0 = \frac{1}{2}x_0 + a_2 x_2 \tag{3}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2}x_0^2 + a_2 x_2^2 \tag{4}$$

$$0 = \frac{1}{2}x_0^3 + a_2 x_2^3. \tag{5}$$

Aus den Gleichungen (3), (4) folgt $a_2 \neq 0$ und $x_2 \neq 0$. Durch Addition des $(-x_0^2)$-fachen von (3) zu (5) erhält man

$$a_2 x_2 (x_2^2 - x_0^2) = 0,$$

folglich ist $x_0^2 = x_2^2$ bzw. $|x_0| = |x_2|$.
Durch Addition des $(-x_0)$-fachen von (3) zu (4) ergibt sich außerdem

$$\frac{2}{3} = a_2 x_2 (x_2 - x_0).$$

Hieraus lässt sich nun schließen, dass $x_0 = -x_2$ und weiter $2a_2x_2^2 = \frac{2}{3}$ gelten muss.
Setzt man dies in (3) ein, so erhält man $0 = x_2(-\frac{1}{2} + a_2)$ und insgesamt (bis auf Vertauschung von x_0 und x_2)

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = \frac{1}{2}, \qquad x_0 = -\frac{2}{3}, \qquad x_2 = \frac{2}{3}.$$