Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. S. Wugalter

SS 2017

# Numerische Methoden
## (Elektrotechnik, Meteorologie, Geodäsie und Geoinformatik)

### 6. Übungsblatt

### Aufgabe 1

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \sin(x) - 0.5x - 0.1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Die Iterierten des zugehörigen Newton-Verfahrens im Schritt $m$ seien mit $x^m$ bezeichnet.

**a)** Zeigen Sie, dass $f$ eine Nullstelle $x^* \in (0, 0.3)$ besitzt.

**b)** Formulieren Sie das Newton-Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle von $f$ und führen Sie drei Iterationen zum Startwert $x^0 = 0.1$ durch.

**c)** Zeigen Sie die Ungleichung (vgl. Satz 5.1 der Vorlesung)

$$|x^{m+1} - x^*| \leqslant \frac{2}{3} \cdot |x^m - x^*|^2 \qquad \text{für } x^m \in (x^* - 0.2, x^* + 0.2).$$

Verwenden Sie dies, um zu zeigen, dass gilt:

$$x^m \in (x^* - 0.2, x^* + 0.2) \quad \Longrightarrow \quad x^{m+1} \in (x^* - 0.2, x^* + 0.2).$$

Begründen Sie (mit Satz 5.1), dass das Newton-Verfahren zum Startwert $x^0 = 0.1$ konvergiert.

### Aufgabe 2

Bestimmen Sie einen Näherungswert zu den Integralen

$$\int_{-1}^{1} \cos(x)\, dx \qquad \text{und} \qquad \int_{-1}^{1} (3x^2 - 2e^x - 5)\, dx$$

unter Verwendung der Trapezregel, der zusammengesetzten Trapezregel zur Intervalllänge $h = \frac{1}{2}$ und der Simpsonregel. Bestimmen Sie darüber hinaus den exakten Wert der Integrale sowie den jeweiligen absoluten Fehler.

### Aufgabe 3

Es seien $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen. Für $m \in \mathbb{N}_0$ bezeichne $\mathbb{P}_m$ die Menge aller Polynome vom Grad $\leqslant m$ und $p_m$ das Monom vom Grad $m$ (d.h. $p_m(x) = x^m$ für $x \in \mathbb{R}$). Mit $R(f)$ bzw. $R(g)$ werde stets der Quadraturfehler bezeichnet.

**a)** Zeigen Sie: Eine Quadraturformel

$$\int_a^b f(x)\, dx = a_0 f(x_0) + \ldots + a_n f(x_n) + R(f)$$

für $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ und $x_0, \ldots, x_n \in [a, b]$ ist genau dann für alle Polynome aus $\mathbb{P}_m$ exakt, wenn sie für die Monome $p_0, p_1, \ldots, p_m$ exakt ist.

— bitte wenden —

**b)** Bestimmen Sie $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ so, dass die Quadraturformel

$$\int_{-1}^{1} g(x)\,dx = a_0 g(-1) + a_1 g(0.75) + a_2 g(1) + R(g)$$

für alle $P \in \mathbb{P}_2$ exakt ist.

**c)** Bestimmen Sie $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ und $x_0, x_2 \in [-1, 1]$ so, dass die Quadraturformel

$$\int_{-1}^{1} g(x)\,dx = \frac{1}{2} g(x_0) + a_1 g(0) + a_2 g(x_2) + R(g)$$

für alle $P \in \mathbb{P}_3$ exakt ist.