Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. S. Wugalter SS 2017

Numerische Methoden

(Elektrotechnik, Meteorologie, Geodäsie und Geoinformatik)

Lösungsvorschläge zum 7. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Wir setzen $f(x) := \dfrac{e^x\cos(x)}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, und zerlegen das Intervall $[0,1]$ durch äquidistante Stützstellen gemäß

$$x_i = ih = \frac{i}{4}, \quad i = 0, \dots, 4, \quad h = \frac{1}{4}.$$

Die zusammengesetzte Trapezregel zur Schrittweite $h = \frac{1}{4}$ lautet in diesem Fall

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx &\approx \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + f(x_4)]\\ &= \frac{1}{8}[f(0) + 2f(\frac{1}{4}) + 2f(\frac{1}{2}) + 2f(\frac{3}{4}) + f(1)]\\ &\approx 1.04674.\end{aligned}$$

Die zusammengesetzte Simpsonregel zur Schrittweite $h = \frac{1}{4}$ liefert

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx &\approx \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)]\\ &= \frac{1}{12}[f(0) + 4f(\frac{1}{4}) + 2f(\frac{1}{2}) + 4f(\frac{3}{4}) + f(1)]\\ &\approx 1.05821.\end{aligned}$$

b) Für die zusammengesetzte Trapezregel gilt die Fehlerdarstellung vom Cauchyschen Typ

$$R_h(f) = -\frac{b-a}{12} \cdot h^2 f''(\eta)$$

für ein $\eta \in [a,b]$.
Es ist

$$f'(x) = \frac{e^x\cos x}{1+x^2} - \frac{e^x\sin x}{1+x^2} - \frac{2xe^x\cos x}{(1+x^2)^2}$$

und

$$\begin{aligned}f''(x) &= -\frac{2e^x\sin x}{1+x^2} - \frac{4xe^x\cos x}{(1+x^2)^2} + \frac{4xe^x\sin x}{(1+x^2)^2} - \frac{2e^x\cos x}{(1+x^2)^2} + \frac{8x^2e^x\cos x}{(1+x^2)^3}\\ &= e^x\left[\left(\frac{-4x-2}{(1+x^2)^2} + \frac{8x^2}{(1+x^2)^3}\right)\cos x - \underbrace{\left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{4x}{(1+x^2)^2}\right)}_{=\frac{2(x-1)^2}{(1+x^2)^2}}\sin x\right]\end{aligned}$$

Schätzt man die einzelnen Terme ab, so erhält man für alle $x \in [0,1]$

$$|f''(x)| \leqslant e\left[1 \cdot \left(\frac{4+2}{1} + \frac{8}{1}\right) + 1 \cdot \frac{2}{1}\right] = 16e < 44.$$

Um eine Genauigkeit von 10^{-4} bei der Berechnung des Integrals mit der zusammengesetzten Trapezregel zu erreichen, muss gelten:

$$|R_h(f)| = \frac{1}{12}h^2|f''(\eta)| \leqslant 10^{-4}.$$

Hinreichend dafür ist (mit $h = \frac{1}{n}$)

$$\frac{1}{12}h^2 \cdot 44 \leqslant 10^{-4} \quad \Leftrightarrow \quad h^2 \leqslant \frac{12}{44}10^{-4} \quad \Leftrightarrow \quad n \geqslant \sqrt{\frac{44}{12}10^4} \approx 191.49.$$

Führt man die Trapezregel also mit einer Unterteilung in mindestens 192 Intervalle durch, so ist sichergestellt, dass der Fehler kleiner 10^{-4} ist.

Bemerkung: Die Abschätzung von f'' ist sehr grob. Es gilt sogar

$$|f''(x)| < 3.11 \qquad \text{für alle } x \in [0,1].$$

Mit Hilfe dieser Abschätzung kann man zeigen, dass eine Unterteilung in $n = 51$ Intervalle ausreichend ist, um eine Genauigkeit von 10^{-4} bei der Approximation des Integrals zu erzielen.

Aufgabe 2

Wir setzen $f(x,y) := y$. Dann ist die Differentialgleichung gegeben durch

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

mit Anfangswert $y(0) = 1$.

a) Für $k \in \mathbb{N}_0$ sind die Näherungswerte y_k von $y(kh)$ beim Euler-Verfahren gegeben durch

$$\begin{aligned} y_0 &= y(0) = 1, \\ y_{k+1} &= y_k + h \cdot f(x_k, y_k) = (1+h)y_k, \end{aligned}$$

wobei $x_k = k \cdot h,\ k \in \mathbb{N}_0$, die Gitterpunkte zur Schrittweite h sind. Die Rekursionsgleichung besitzt die Lösung

$$y_k = (1+h)^k, \qquad k \in \mathbb{N}_0.$$

b) Ist $x > 0$ und $n \in \mathbb{N}$, so gilt für den Näherungswert $y_n(x) := y_n$ zur Schrittweite $h = \frac{x}{n}$ nach Aufgabenteil a)

$$y_n(x) = (1+h)^n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

c) Aus der Höheren Mathematik ist bekannt, dass

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x = y(x).$$

Dies zeigt, dass das Euler-Verfahren für das gegebene Anfangswertproblem gegen die Lösung des Problems konvergiert.

Aufgabe 3

Es sei im Folgenden stets $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$.

a) Das Euler-Verfahren zum gegebenen Anfangswertproblem

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(0) = 1$$

lautet

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \quad y_0 = 1$$

mit $x_0 = 0$ und $x_n = nh,\ n = 1, 2, \ldots$.
Für die Schrittweite $h = \frac{1}{2}$ erhält man

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h(x_n^2 + y_n^2 - 1) \\ &= y_n + \frac{1}{2}y_n^2 + \frac{1}{8}n^2 - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 1, \\ y_2 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{2} = \frac{9}{8} = 1.125, \end{aligned}$$

die Näherungslösung im Punkt $x_2 = 1$ ist gegeben durch $y(1) \approx 1.125$.

Zur Schrittweite $h = \frac{1}{4}$: Analog zu oben gilt

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h(x_n^2 - +y_n^2 - 1) \\ &= y_n + \frac{1}{4}y_n^2 + \frac{1}{64}n^2 - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} y_1 &= 1, \\ y_2 &= \frac{65}{64} = 1.015625, \\ y_3 &\approx 1.08600, \\ y_4 &\approx 1.27147. \end{aligned}$$

In diesem Fall erhalten wir also die Näherung $y(1) \approx 1.27147$.

b) Das Halbschrittverfahren zum selben Anfangswertproblem lautet

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hf(x_n, y_n)\right), \quad y_0 = 1.$$

Wir erhalten für die Schrittweite $h = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 + \frac{1}{2}f\left(0 + \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{4}f(0,1)\right) = 1 + \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{4}, 1\right) = \frac{33}{32}, \\ y_2 &= \frac{33}{32} + \frac{1}{2}f\left(\frac{3}{4}, \frac{33}{32} + \frac{1}{4}f\left(\frac{1}{2}, \frac{33}{32}\right)\right) \approx 1.428127. \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Halbschrittverfahrens ergibt sich also die Näherung $y(1) \approx 1.428127$.

Aufgabe 4

Es bezeichne z die Lösung des Anfangswertproblems

$$z'(t) = f(t, z(t)), \quad z(x) = y$$

und

$$\Delta(x, y, h) := \begin{cases} \frac{z(x+h)-y}{h}, & h \neq 0 \\ f(x, y), & h = 0 \end{cases}$$

den exakten relativen Zuwachs der Lösung z. Der lokale Diskretisierungsfehler des Einschrittverfahrens

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(x_n, y_n, h), \quad y(x_0) = y_0$$

ist dann gegeben durch

$$\theta(x, y, h) = \Delta(x, y, h) - \Phi(x, y, h).$$

Das Einschrittverfahren besitzt die Konsistenzordnung 2, falls für den lokalen Diskretisierungsfehler gilt

$$\theta(x, y, h) = \mathcal{O}(h^2), \quad h \to 0.$$

a) Ist f hinreichend oft stetig differenzierbar, so gilt

$$\begin{aligned} z(x+h) &= z(x) + hz'(x) + \frac{h^2}{2}z''(x) + \frac{h^3}{6}z'''(\xi) \\ &= y + hf(x, y) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=x} f(t, z(t)) + \frac{h^3}{6}z'''(\xi) \\ &= y + hf(x, y) + \frac{h^2}{2}(f_x(x, y) + f_y(x, y) \cdot z'(x)) + \frac{h^3}{6}z'''(\xi) \\ &= y + hf(x, y) + \frac{h^2}{2}(f_x(x, y) + f_y(x, y)f(x, y)) + \frac{h^3}{6}z'''(\xi) \end{aligned}$$

für ein $\xi \in (x, x+h)$. Außerdem ist

$$\Phi(x, y, h) = \Phi(x, y, 0) + h\frac{\partial \Phi}{\partial h}(x, y, 0) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial h^2}(x, y, \xi^*)$$

für ein $\xi^* \in (0, h)$.
Dies ergibt für den lokalen Diskretisierungsfehler

$$\begin{aligned} \theta(x, y, h) &= \Delta(x, y, h) - \Phi(x, y, h) \\ &= \frac{z(x+h) - y}{h} - \Phi(x, y, h) \\ &= f(x, y) - \Phi(x, y, 0) + h[\frac{f_x(x, y) + f_y(x, y)f(x, y)}{2} - \frac{\partial \Phi}{\partial h}(x, y, 0)] \\ &\quad + \frac{h^2}{2}[\frac{z'''(\xi)}{3} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial h^2}(x, y, \xi^*)]. \end{aligned}$$

Damit nun $\theta(x, y, h) = \mathcal{O}(h^2),\ h \to 0$ gilt für alle zweimal stetig differenzierbaren Funktionen f und alle (x, y) aus dem Definitionsbereich G von f, müssen die Bedingungen

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \Phi(x, y, 0) \\ \frac{f_x(x, y) + f_y(x, y)f(x, y)}{2} &= \frac{\partial \Phi}{\partial h}(x, y, 0) \end{aligned}$$

erfüllt sein.

b) Das Verfahren von Heun ist beschrieben durch

$$\Phi(x, y, h) = \frac{1}{2}\left(f(x, y) + f(x + h, y + hf(x, y))\right).$$

Hier gilt also

$$\Phi(x, y, 0) = \frac{1}{2}(f(x, y) + f(x + 0, y + 0)) = f(x, y)$$

und

$$\frac{\partial \Phi}{\partial h}(x, y, 0) = \frac{1}{2}(f_x(x, y) + f_y(x, y)f(x, y)).$$

Nach a) besitzt das Verfahren von Heun die Konsistenzordnung 2.

Aufgabe 5

Es sei $y : [0, 1] \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Außerdem sei $x_i := ih$ für $i = 0, 1, \ldots, N + 1$, wobei $N \in \mathbb{N}$ und $h := \frac{1}{N+1}$ sei.

a) Nach dem Satz von Taylor gilt

$$y(x_i - h) = y(x_i) - hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + \mathcal{O}(h^3),$$
$$y(x_i - h) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + \mathcal{O}(h^3)$$

für $h \to 0$ und $i = 1, \ldots, N$. Hieraus folgt

$$\frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} = y'(x_i) + \mathcal{O}(h^2).$$

b) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass sich die Ableitungswerte $y''(x_i)$ für $i = 1, \ldots, N$ mit Hilfe der zweiten Differenzen gemäss

$$y''(x_i) = \frac{y(x_{i-1}) - 2y(x_i) + y(x_{i+1})}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

approximieren lassen. Für die Ableitungswerte $y'(x_i)$ verwenden wir die in Aufgabenteil a) beschriebene Approximation. Vernachlässigen wir die Fehlerterme und setzen die Approximationen in die gegebene Differentialgleichung

$$y''(x) - \alpha y'(x) - \beta y(x) = 0, \qquad y(0) = \gamma_0,\ y(1) = \gamma_1$$

ein, so erhalten wir mit

$$y_i \approx y(x_i), \quad i = 1, \ldots, N, \qquad y_0 = y(x_0) = y(0), \quad y_{N+1} = y(x_{N+1}) = y(1)$$

das lineare Gleichungssystem

$$\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} - \alpha\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - \beta y_i = 0, \qquad i = 1, \ldots, N,$$
$$y_0 = \gamma_0,$$
$$y_{N+1} = \gamma_1.$$

Durch Einsetzen der Randwerte in die erste und N-te Gleichung und Multiplikation mit h^2 erhalten wir

$$(2 + \beta h^2)y_1 - (1 - \frac{\alpha h}{2})y_2 = (1 + \frac{\alpha h}{2})\gamma_0,$$
$$-(1 + \frac{\alpha h}{2})y_{i-1} + (2 + \beta h^2)y_i - (1 - \frac{\alpha h}{2})y_{i+1} = 0, \qquad i = 2, \ldots, N - 1,$$
$$-(1 + \frac{\alpha h}{2})y_{N-1} + (2 + \beta h^2)y_N = (1 - \frac{\alpha h}{2})\gamma_1.$$

Setzt man

$$\tau := \frac{(1 + \frac{\alpha h}{2})}{2 + \beta h^2} \quad \text{und} \quad \eta := \frac{(1 - \frac{\alpha h}{2})}{2 + \beta h^2},$$

so hat das lineare Gleichungssystem die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & -\eta & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\tau & 1 & -\eta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\tau & 1 & -\eta & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & & \dots & -\tau & 1 & -\eta \\ 0 & & \dots & & -\tau & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \\ \vdots \\ \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau\gamma_0 \\ 0 \\ \\ \vdots \\ \\ \eta\gamma_1 \end{pmatrix}.$$