Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. S. Wugalter

SS 2017

Numerische Methoden

(Elektrotechnik, Meteorologie, Geodäsie und Geoinformatik)

7. Übungsblatt

Aufgabe 1

Ziel dieser Aufgabe ist die Bestimmung eines Näherungswertes für

$$I(f) = \int_0^1 \frac{e^x \cos(x)}{1+x^2}\, dx\,.$$

a) Bestimmen Sie Näherungen an $I(f)$ unter Verwendung der zusammengesetzten Trapezregel bzw. Simpsonregel zur Schrittweite $h = 0.25$.

b) Wie groß ist n zu wählen, um mit Hilfe der zusammengesetzten Trapezregel zur Schrittweite $h = \frac{1}{n}$ das Integral mit einer Genauigkeit von 10^{-4} zu berechnen?

Aufgabe 2

Gegeben sei die Differentialgleichung $y' = y$, $y(0) = 1$, deren eindeutige Lösung $y(x) = e^x$ mit dem Euler-Verfahren näherungsweise berechnet werden soll.

a) Wie lautet die Rekursionsgleichung zur Berechnung der Näherungswerte y_k an $y(kh)$ mit dem Euler-Vefahren zur Schrittweite h? Lösen Sie diese Gleichung.

b) Die Schrittweite sei nun $h = \frac{x}{n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $x > 0$. Welcher Näherungswert $y_n(x)$ an $y(x)$ ergibt sich?

c) Zeigen Sie: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n(x) = y(x)$.

Aufgabe 3

Es sei y die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = x^2 + y^2 - 1, \qquad\qquad y(0) = 1.$$

Berechnen Sie Näherungswerte an $y(1)$ unter Verwendung

a) des Euler-Verfahrens zu den Schrittweiten $h_1 = \frac{1}{2}$, $h_2 = \frac{1}{4}$;

b) des Halbschrittverfahrens zu der Schrittweite $h = \frac{1}{2}$.

— bitte wenden —

Aufgabe 4

Gegeben sei ein Einschrittverfahren der Form

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(x_n, y_n, h), \qquad y(x_0) = y_0$$

mit $x_n = x_0 + nh$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$ zur Berechnung einer Näherungslösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = f(x, y(x)), \qquad y(x_0) = y_0.$$

Zeigen Sie:

a) Das Einschrittverfahren ist genau dann von der Konsistenzordnung 2, wenn gilt:

$$\Phi(x, y, 0) = f(x, y) \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial h}(x, y, 0) = \frac{\partial_1 f(x, y) + \partial_2 f(x, y) f(x, y)}{2}.$$

Hinweis: Verwenden Sie dazu die Taylorentwicklung der Verfahrensfunktion $\Phi(x, y, h)$ bzgl. der Variablen h bis zur Ordnung 1 und die Taylorentwicklung von $z(x + h)$ bis zur Ordnung 2. Dabei sei z die Lösung des Anfangswertproblems

$$z'(t) = f(t, z(t)), \qquad z(x) = y.$$

Berechnen Sie dann den (in der Vorlesung definierten) lokalen Diskretisierungsfehler

$$\theta(x, y, h) = \Delta(x, y, h) - \Phi(x, y, h).$$

b) Das Verfahren von Heun ist von der Konsistenzordnung 2.

Aufgabe 5

Es sei $y : [0, 1] \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Außerdem sei $x_i := ih$ für $i = 0, 1, \ldots, N + 1$, wobei $N \in \mathbb{N}$ und $h := \frac{1}{N+1}$ sei.

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Taylorschen Satzes, dass gilt:

$$\frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} = y'(x_i) + \mathcal{O}(h^2)$$

für $i = 1, \ldots, N$ und $h \to 0$.

b) Es seien $\alpha, \beta, \gamma_0, \gamma_1 \in \mathbb{R}$. Geben Sie ein Finite-Differenzen-Verfahren für das Randwertproblem

$$y''(x) - \alpha y'(x) - \beta y(x) = 0, \qquad y(0) = \gamma_0, \; y(1) = \gamma_1$$

an. Verallgemeinern Sie dazu Resultat 8.2 der Vorlesung.