UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Dr. A. Müller-Rettkowski

WS 2005/06
27. Okt. 2005

1. Übungsblatt

Partielle Differentialgleichungen

Aufgabe 1

Mittels Variablenseparation berechne man Lösungen der Gleichung

$$u_{xx} - u_t = 0 \qquad (+)$$

für $z = u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$.

Lösen Sie die Gleichung (+) unter den Bedingungen

$$\begin{aligned} &u(x,0) = f(x)\ ,\ 0 \le x \le \ell\ , \\ &u(0,t) = u(\ell,t) = 0\ . \end{aligned}$$

Hierbei ist f eine vorgegebene stetige Funktion und ℓ eine feste positive Zahl.

Aufgabe 2

Es sei $\Delta_n = \sum_{j=1}^{n} \partial^2_{x_j}$. Bestimmen Sie Lösungen $u = u(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, der Gleichung

$$\Delta_n u(x) = 0\ ,\ x \in \mathbb{R}^n\ ,$$

die nur vom Abstand von einem festen Punkt $y \in \mathbb{R}^n$ abhängen.

Aufgabe 3

Es sei A eine invertierbare (n,n)-Matrix und $y = Ax$ und $u(x) := v(Ax)$ mit einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Zeigen Sie:
Es gilt $(\Delta_x u(x) = 0 \longleftrightarrow \Delta_y v(y) = 0)$ dann und nur dann, wenn $A = \lambda B$ ist mit einer orthogonalen Matrix B und einer positiven Konstanten λ.

Aufgabe 4

Eine Testfunktion ist eine Funktion aus $C^\infty(\mathbb{R})$, die außerhalb einer beschränkten Menge (dem Träger der Funktion) verschwindet.

Es sei

$$h(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & ,\quad x > 0\ , \\ 0 & ,\quad x \le 0\ . \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass auf $\mathbb{R}$ durch

$$\varphi(x) = h(x)h(1-x) \text{ und } \psi(x) = \varphi\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\ (a < b)$$

Testfunktionen definiert sind. Skizzieren Sie die Graphen von φ und ψ. Geben Sie insbesondere jeweils den Träger an.