UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Dr. A. Müller-Rettkowski

WS 2005/06
27. Okt. 2005

2. Übungsblatt
Partielle Differentialgleichungen

Aufgabe 1

Lösen Sie das Problem für $z = u(x,t)$:

$$\begin{aligned} u_t(x,t) + cu_x(x,t) &= f(x,t) \quad , \quad x \in \mathbb{R}, T > 0 \\ u(x,0) &= 0 \quad , \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

mit der Methode von Duhamel.
($f \in C^0$ und $c =$ konst sind gegeben.)

Aufgabe 2

Leiten Sie die d'Alembertsche Formel her.

Aufgabe 3

Es sei $z = u(x,t)$ die Lösung des Problems

$$\begin{aligned} &u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0 \quad , \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2 \, , \\ &u(x,0) = g(x),\; u_t(x,0) = h(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R} \, . \end{aligned}$$

a) Es gelte $g(x) = h(x) = 0$ für $|x - x_0| \leq \ell$. Berechnen Sie das größte T, für das $u(x_0,t) = 0$ für $t \leq T$ sicher gilt.

b) Es gelte $g(x) = h(x) = 0$ für $|x| > 1$. Berechnen Sie das größte T, für das $u(3,t) = 0$ für $t \leq T$ sicher gilt.

c) Es gelte $g(x) = h(x) = 0$ für $|x| > \ell$. Es sei $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig, fest. Zeigen Sie, dass es Zahlen T und U gibt mit $u(x_0,t) = U$ für $t > T$.
Berechnen Sie T und U.

Aufgabe 4

a) Berechnen Sie $z = u(x,t)$ mit

$$\begin{aligned} &u_t(x,t) + cu_x(x,t) = 0 \quad , \quad x > 0, t > 0 \, , \\ &u(x,0) = 1 \quad , \quad x > 0 \, , \\ &u(0,t) = \frac{1+t^2}{1+2t^2} \quad , \quad t > 0 \, . \end{aligned}$$

(c ist eine vorgegebene Konstante.) Welche Voraussetzung fehlt?

b) Berechnen sie $z = u(x,t)$ mit

$$\begin{aligned} &u_t(x,t) - u_x(x,t) = 0 \quad , \quad 0 < x < 1, t > 0 \, , \\ &u(x,0) = 2 \quad , \quad 0 < x < 1 \, , \\ &u(1,t) = \frac{2}{1+t^2} \quad , \quad t > 0 \, . \end{aligned}$$