WS 2005/06
3. Nov. 2005

3. Übungsblatt

Partielle Differentialgleichungen

Aufgabe 1

Gegeben ist das Problem

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 \quad &, \quad x \in \mathbb{R}\,,\ t > 0 \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) &= \psi_\varepsilon(x) \quad &, \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

für die Funktion $u = u(x,t)(c > 0$ fest, $\varepsilon > 0$ fest). Hierbei sei $\psi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\,\psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, wobei

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad |x| \geq 1 \\ e^{1/(x^2-1)} & \text{für} \quad |x| < 1 \end{cases}$$

gesetzt ist.

a) Lösen Sie das Problem. Diskutieren Sie das Verhalten der Lösung $u_\varepsilon = u_\varepsilon(x,t)$ für $0 < \varepsilon \to 0$.

b) Machen Sie dasselbe noch einmal, jetzt aber mit den Anfangsvorgaben

$$u(x,0) = \psi_\varepsilon(x),\ u_t(x,0) = 0 \quad (-\infty < x < \infty)\ .$$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie Lösungen $z = u(x,y)$ der Gleichung $F(u, u_x, u_y) = 0$ mittels des Ansatzes $u(x,y) = \varphi(ax + by)$, $a, b \in \mathbb{R}$ konst.

Wenden Sie dies an auf:

a) $u_x^2 u + u_y^2 = 4$,

b) $x u_x^2 + y u_y^2 + u = 0$.

– bitte wenden –

Aufgabe 3

Die Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ heißt schwache Lösung der Wellengleichung $Lu = u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$, wenn

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)(L\varphi)(x,t)d(x,t) = 0$$

gilt für alle Funktionen $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^2)$, die außerhalb einer beschränkten Menge verschwinden.

Zeigen Sie:

a) Gilt für $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ $Lu = 0$, so ist u schwache Lösung.

b) $u(x,t) = H(x \pm ct)$ sind schwache Lösungen der Wellengleichung. ($H(x) = 0$, $x < 0$; $H(x) = 1$, $x \geq 0$.)

Aufgabe 4

Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und V ein Gebiet in $U \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

$a = a(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n$ und $b = b(x, x_{n+1})$ sind auf V definierte und stetig differenzierbare Funktionen.

Beweisen Sie die folgende Aussage:

Ist $z^* = u^*(x, x_{n+1})$ mit $u^*_{x_{n+1}} \neq 0$ eine Lösung der DGl.

$$a(x, x_{n+1}) \cdot u^*_x(x, x_{n+1}) + b(x, x_{n+1})u^*_{x_{n+1}} = 0 \ , \quad (x, x_{n+1}) \in V \ ,$$

so werden durch $u^*(x, u(x)) = \text{Const}$ implizit Lösungen $z = u(x)$ von

$$a(x,u) \cdot Du(x) = b(x,u), x \in U \ ,$$

gegeben.