UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Dr. A. Müller-Rettkowski

WS 2005/06
10. Nov. 2005

4. Übungsblatt

Partielle Differentialgleichungen

Aufgabe 1

Es sei $a : G_0 \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion. Es gibt kein Teilgebiet $\tilde{G}_0 \subset G_0$ mit $(a(x) = 0,\ x \in \tilde{G}_0$.

Beweisen Sie: Für je n Lösungen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ der DGl

$$a(x) \cdot Du(x) = 0\ ,\ x \in G_0\ ,$$

gilt: $\det\,(\nabla u_1(x),\, \nabla u_2(x), \ldots, \nabla u_n(x)) = 0\,,\, x \in G_0$.

Aufgabe 2

Es liegt die quasilineare DGl für $z = u(x,y)$ vor:

$$(+) \qquad \begin{pmatrix} a_1(x,y,u) \\ a_2(x,y,u) \end{pmatrix} \cdot Du(x,y) = b(x,y,u)\ ,\ (x,y) \in U\ ,$$

a_1, a_2, b stetig differenzierbar.

Die Lösungen der charakteristischen Differentialgleichungen sind als Schnitt der beiden Flächenscharen

$$\Phi(x,y,z) = \alpha\ ,\ \chi(x,y,z) = \beta \qquad (\alpha, \beta \text{ konst})$$

gegeben.

Es sei F eine beliebige stetig differenzierbare Funktion zweier Variabler.

Beweisen Sie:

Durch $F(\Phi(x,y,z),\ \chi(x,y,z)) = 0$ wird implizit eine Lösung $z = u(x,y)$ von (+) gegeben.

Führen Sie dies Verfahren bei der Gleichung

$$u(xu_x - yu_y) = y^2 - x^2$$

durch.

– bitte wenden –

Aufgabe 3

Es liegen die Gleichung für $z = u(x, y)$:

$$uu_x + yu_y = x$$

und die Kurve $\Gamma : x = s,\ y = s \quad (s > 0)$ vor.

Gesucht sind Lösungen in der Umgebung des Punktes $(1, 1)$ mit

a) $u = 2s$ auf Γ , b) $u = s$ auf Γ ,

c) $u = \sin \dfrac{\pi}{2} s$ auf Γ .

Aufgabe 4

Untersuchen Sie für die Gleichung $uu_x + u_y = 1$ die Probleme:

Gesucht ist $z = u(x, y)$ mit

a) $u(x, x) = 0$, b) $u(x, x) = 1$.

Aufgabe 5

Berechnen Sie $v = v(x) \quad (x = (x_1, \ldots, x_n))$ mit

$$\sum_{j=1}^{n} v_{x_j}(x) = 0\ ,\ x \in G_0 \subset \mathbb{R}^n\ ,$$
$$v(x)|_{x_n=0} = f(x_1, \ldots, x_{n-1})\ ,$$

(f ist eine vorgegebene stetige Funktion)