UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Dr. A. Müller-Rettkowski

WS 2005/06
17. Nov. 2005

# 5. Übungsblatt

# Partielle Differentialgleichungen

## Aufgabe 1

Berechnen Sie die Einhüllende der Kurvenschar mit dem Scharparameter $c \in \mathbb{R}$:

$$(x - \cos(c))^2 + (y - \sin(c))^2 = 1$$

## Aufgabe 2

Es sei $r > 0$ fest. Durch $x(s) = r\cos\tau - r\,s\sin\tau,\ y(s) = r\sin\tau + r\,s\cos\tau \quad (s \in \mathbb{R})$ wird für jedes $\tau \in [0, 2\pi)$ die Kurve $k_\tau$ gegeben.

Berechnen Sie die Einhüllende der Kurvenschar $\{k_\tau, \tau \in [0, 2\pi)\}$.

## Aufgabe 3

Berechnen Sie vollständige Integrale:

a) $u_x u_y = u$ , b) $u_x u_y = 1$ , c) $u = u_x x + u_y y + u_x u_y$ .

## Aufgabe 4

$z = u(x, y)$ heißt **verallgemeinerte Lösung** der DGl

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = c(x, y)u + d(x, y)\ ,\ (x, y) \in G\ ,$$

$(a, b \in C^1(G)\ ,\ c, d \in C(G))$, wenn für jeden beschränkten und abgeschlossenen Bereich $R \subset G$ mit stückweise glattem Rand $\partial R$ gilt:

$$\int_{\partial R} audy - budx = \iint_R ((c + a_x + b_y)u + d)d(x, y)\ .$$

i) Rechtfertigen Sie die Bezeichnung „verallgemeinerte Lösung“.

ii) Zeigen Sie, dass für $u_y + cu_x = 0 \quad (c > 0$ konst) die Funktion

$$u(x, y) = \begin{cases} x - cy & ,\quad x < cy\ , \\ 1 & ,\quad x > cy\ , \end{cases}$$

eine verallgemeinerte Lösung ist, die Funktion

$$u(x, y) = \begin{cases} x - cy & ,\quad x < 0\ , \\ 1 & ,\quad x > 0\ , \end{cases}$$

jedoch nicht.