UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Dr. A. Müller-Rettkowski

WS 2005/06
24. Nov. 2005

6. Übungsblatt
Partielle Differentialgleichungen

Aufgabe 1

Es seien $H = H(t,x,y) \in C^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ und $S = S(t,x,a) \in C^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times A)(A \subset \mathbb{R}^n)$ reellwertige Funktionen.

Es sei $S = S(t,x,a)$ ein vollständiges Integral der Hamilton-Jacobi DGl

$$u_t + H(t,x,u_x) = 0$$

und für $x = X(t,a,b) \in C^1(\mathbb{R} \times A \times \mathbb{R}^n)$ gelte

$$S_a(t, X(t,a,b), a) = -b \ .$$

Setze $Y(t,a,b) := S_x(t, X(t,a,b), a)$.
Dann sind $x := X(t,a,b),\ y := Y(t,a,b)$ Lösungen des Hamilton Systems

$$\dot{x} = H_y(t,x,y),\ \dot{y} = -H_x(t,x,y) \ ,$$

die noch von $2n$ Parametern $a = (a_1,\ldots,a_n)$ und $b = (b_1,\ldots,b_n)$ abhängen.

Aufgabe 2

Das Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^2$ wird durch die Kurve $\gamma : x = \phi(y)$, $\phi \in C^1$, in die Teilgebiete G_1 und G_2 zerlegt.

Es sei $u \in C^0(\bar{G}) \cap C^1(\bar{G}_1) \cap C^1(\bar{G}_2)$, und es gelte

$$(+) \qquad u_y + uu_x = 0 \quad \text{in } G_1 \text{ und in } G_2 \ .$$

u_x besitze auf der Kurve γ eine Sprungunstetigkeit. Beweisen Sie, dass γ charakteristische Grundkurve für die Gleichung (+) ist.

Aufgabe 3

Berechnen Sie eine Lösungsfläche $z = u(x,y)$, die die y-Achse enthält:

$$u_x^2 + u_y^2 - e^y = 0 \ .$$

Aufgabe 4

a) Gesucht sind die Flächen $z = u(x,y)$, die den beiden Gleichungen $xu_x = yu_y$ und $u_x u_y = 1$ genügen.

b) Durch die Kurven $r(t) = (t,t,2t^2)$ und $\varrho(t) = (t,-t,-2t^2)$ $\quad (t \in \mathbb{R})$ soll eine Fläche $z = u(x,y)$ gelegt werden, die der Gleichung $u_{xx} + u_{xy} = 2$ genügt.