7. Übungsblatt

Partielle Differentialgleichungen

Aufgabe 1

Es liegt die DGl $u_x^2 + u_y^2 = u^2$ vor.

a) Berechnen Sie die charakteristischen Streifen.

b) Berechnen Sie die Lösungsflächen, die

   i) die Kurve $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1,\ z = 1\}$
   ii) die Kurve $x = s,\ y = 0,\ z = 1$

   enthalten.

Aufgabe 2

Gegeben ist die 2parametrige Flächenschar

$$z = u(x, y, a_1, a_2) = \sqrt{1 - (x - a_1)^2 - (x - a_2)^2}\ (a_1, a_2 \in \mathbb{R}) .$$

a) Finden Sie die zugehörige DGl.

b) Berechnen Sie die charakteristischen Streifen.

c) Berechnen Sie die Lösungen durch $x = s,\ y = 0,\ z = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 3

Für die DGl $u_x^2 + u_y^2 = 1$ ist für je drei Zahlen $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}$

$$(x_0, 2t + y_0,\ 2t + z_0, 0, 1) \quad (t \in \mathbb{R})$$

ein charakteristischer Streifen.

Durch jeden Punkt $(x_0, y_0, x_0 + y_0)$ der Fläche $z = x + y$ geht die Raumkurve

$$(x_0, 2t + y_0, 2t + x_0 + y_0) \quad (t \in \mathbb{R}) ,$$

und diese Kurve liegt für alle t auf der Fläche $z = x + y$.
Trotzdem ist $z = x + y$ keine Lösung der DGl.
Erklären Sie das.

– bitte wenden –

Aufgabe 4

$F(x,z,p)$, $G(x,z,p)$ seien im Gebiet $G \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ definiert und dort stetig differenzierbar.

1) $[F,G] := F_x \cdot G_p - G_x \cdot F_p + p \cdot (F_z G_p - G_z F_p)$.

2) G heißt Vorintegral der DGl $F(x,u(x),Du(x)) = 0(+)$, falls $G = \text{const}$ ist längs jeder Lösung des charakteristischen DGl.Systems der DGl $(+)$.

   Beweisen Sie:

   a) G ist Vorintegral der DGl $(+) \longleftrightarrow [F,G] = 0$.

   b) Es sei u eine C^2-Lösung der DGln

   $$F(x,u(x),Du(x)) = 0 \ ,$$
   $$G(x,u(x),Du(x)) = 0 \ .$$

   Beh.: $[F,G](x,u(x),Du(x)) = 0$.