UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Dr. A. Müller-Rettkowski

WS 2005/06
15. Dez. 2005

9. Übungsblatt

Partielle Differentialgleichungen

Aufgabe 1

Es seien a, b, c, d und h, ϕ, ψ in ihrem jeweiligen Definitionsbereich genügend oft differenzierbar. $u \in C^4$ sei eine Lösung der linearen DGl

$$Lu(x, y) = a(x, ys)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} = d(x, y) \ ,$$

die in der Umgebung der glatten Kurve $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ definiert ist. Zeigen Sie, dass man mit den Cauchydaten $u|_\gamma = h$, $u_{x|_\gamma} = \phi$, $u_{y|_\gamma} = \psi$ eindeutig alle dritten und vierten Ableitungen von u auf γ berechnen kann, falls γ nicht charakteristisch ist.

Aufgabe 2

Lösen Sie das folgende Problem:

Gesucht ist $z = u(x, y)$ mit

$$\begin{aligned} &u_{xx} + 4u_{xy} + 3u_{yy} = 0 &&, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ , \\ &u(2y, y) = 1,\ u_x(2y, y) = 2y &&, \quad y \in \mathbb{R} \ . \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Lösen Sie durch eine Potenzreihe um den Nullpunkt: $u_x = x^2 + u_y^2 \ ,\ u(0, y) = y^2$.

– bitte wenden –

Aufgabe 4

Es sei $Lu = u_{yy} - c^2 u_{xx}$ ($c > 0$ konst).
Ein Viereck in der (x,y)-Ebene, dessen Rand aus Charakteristiken von L gebildet wird, heißt charakteristisches Parallelogramm.

a) Zeigen Sie: Ist $G = (A\,B\,C\,D)$ ein charakteristisches Parallelogramm mit den Ecken A, B, C, D und $u \in C^2(\bar{G})$, so gilt

$$\iint\limits_G Lu\, d(x,y) = 2c(u(A) + u(C) - u(B) - u(D)) \ .$$

b) Zeigen Sie den folgenden Satz:

Vor: G sei ein Gebiet der (x,y)-Ebene, $u \in C^2(G)$.

Beh: $Lu = 0$ in G

$\longleftrightarrow$

für jedes in G liegende charakteristische Parallelogramm $(A\,B\,C\,D)$ gilt

$$u(A) + u(C) = u(B) + u(D) \ .$$

Korrektur

Aufgabe 1 a) vom 8. Übungsblatt

Anstelle von $u\left(\frac{y^2}{2}, y\right) = 0$ muss es heißen $u(0,y) = e^{y^3}$.