UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Dr. A. Müller-Rettkowski

WS 2005/06
22. Dez. 2005

10. Übungsblatt

Partielle Differentialgleichungen

Aufgabe 1

Berechnen Sie für die Gleichung

$$u_{xx} + y u_{yy} = 0$$

die elliptische und hyperbolische Normalform.

Aufgabe 2

a) Zeigen Sie: Jede Gleichung der Form

$$\Delta u(x) + \sum_{j=1}^{u} b_j u_{x_j}(x) + c u(x) = 0$$

mit konstanten Koeffizienten b_j, c lässt sich auf die Gestalt

$$\Delta v(x) + \lambda v(x) = 0$$

mit einer geeigneten Konstanten λ transformieren.

b) Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Normalgebiet. Zeigen Sie: Aus $u \in C^2(G) \cap C^1(\bar{G})$, $u \neq 0$, $\lambda =$ konst und

$$\begin{aligned} \Delta u + \lambda u &= 0 \text{ in } G \,, \\ u &= 0 \text{ auf } \partial G \,, \end{aligned}$$

folgt: $\lambda \geq 0$.

Aufgabe 3

a) Es sei $D = \{(x, y) \mid 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi\}$. Lösen Sie:

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} + 2u &= 0 \text{ in } D \,, \\ u &= 0 \text{ auf } \partial D \,. \end{aligned}$$

b) Lösen Sie

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad &, \quad 1 < x^2 + y^2 < 4 \,, \\ u = 0 \quad &, \quad x^2 + y^2 = 1 \,, \\ u = \frac{3}{4} y \quad &, \quad x^2 + y^2 = 4 \,. \end{aligned}$$

– bitte wenden –

Aufgabe 4

Es sei $R > 0$. Für $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ definiere

$$x = f(\xi) := \frac{R^2}{\|\xi\|^2}\,\xi\ .$$

Es seien $D \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ein Gebiet, $f(D) = D'$ und $u \in C^2(D')$, $u : D' \to \mathbb{R}$. Definiere

$$v(\xi) := \left(\frac{R}{\|\xi\|}\right)^{n-2} u(f(\xi)),\ \xi \in D\ .$$

Es ist $(\Delta_n u)(f(\xi))$ durch $(\Delta_n v)(\xi)$ auszudrücken.