UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Dr. A. Müller-Rettkowski

WS 2005/06
12. Jan. 2006

11. Übungsblatt

Partielle Differentialgleichungen

Aufgabe 1

Beweisen sie die Äquivalenz der ersten und zweiten Mittelwerteigenschaft.

Aufgabe 2

Es sei $G = \{(x, y)|0 < x < a,\ 0 < y < b\}$ und $h \in C^\circ(G)$. Lösen Sie das Problem:

$$\begin{aligned} \Delta u &= h \quad \text{in} \quad G\ , \\ u &= 0 \quad \text{auf} \quad \partial G\ . \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Durch $\xi = u(x, y)$, $\eta = v(x, y)$ sei eine Abbildung des Gebietes $G \subseteq \mathbb{R}^2$ auf das Gebiet $G' \subseteq \mathbb{R}^2$ gegeben. u, v seien Real- und Imaginärteil einer auf G definierten schlichten Funktion. Zeigen Sie:

$H = H(\xi, \eta)$ ist in G' harmonisch $\longleftrightarrow$ $h(x, y) := H(u(x, y), v(x, y))$ ist in G harmonisch.

Aufgabe 4

$G \subseteq \mathbb{R}^3$, $G \in C^1$ sei ein beschränktes Gebiet. Es sei $h \in C^\circ(\partial G)$ und u die in G harmonische Funktion, die $u(x) = h(x)$, $x \in \partial G$, erfüllt.

Es sei $w \in C^2(G) \cap C^\circ(\bar{G})$ mit $w(x) = h(x), x \in \partial G$. Zeigen Sie:

$$\int_G |\nabla w|^2 d\tau \geq \int_G |\nabla u|^2 d\tau\ .$$