UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Dr. A. Müller-Rettkowski

WS 2005/06
19. Jan. 2006

12. Übungsblatt

Partielle Differentialgleichungen

Aufgabe 1

Beweisen Sie den Satz 2 aus der 21. Vorlesung (Z 21) nach dem Schema von Satz 1.

Aufgabe 2

Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Gebiet. $u \in C^\circ(G)$ heißt in G **subharmonisch**, wenn für jedes $x \in G$

$$u(x) \leq \frac{1}{4\pi r^2} \int\limits_{S(x,r)} u(y) d\sigma$$

für genügend kleine $r > 0$ gilt.
Es sei $u \in C^2(G)$ in G subharmonisch. Zeigen Sie: $\Delta u(x) \geq 0\ ,\ x \in G$.

Aufgabe 3

$G \subseteq \mathbb{R}^3$ sei ein beschränktes Normalgebiet, $k > 0$ sei eine Konstante, und $L := \Delta_3 + k^2$ sei auf $C^2(G) \cap C^1(\bar{G})$ definiert.

a) Bestimmen Sie die kugelsymmetrischen Lösungen der Gleichung $Lu = 0$.

b) Zeigen Sie: Für eine Lösung u von $Lu = 0$ gilt die Darstellungsformel aus Satz 1 (Z 21/formuliert mit $s(y,x)$) mit $\tilde{s}(y,x) := +\dfrac{\cos(k\|y-x\|)}{4\pi\|y-x\|}$ anstelle von $s(y,x)$.

Aufgabe 4

Es sind a, b mit $0 < b < a$ gegeben.

Bestimmen Sie $u \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ mit den Eigenschaften $|u(x)| \leq 1\ ,\ x \in \mathbb{R}^3$ und

$$u(x) = \begin{cases} 1 & , \quad \|x\| \leq b\ , \\ 0 & , \quad \|x\| \geq a\ . \end{cases}$$