UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I
Dr. A. Müller-Rettkowski

WS 2005/06
2. Febr. 2006

14. Übungsblatt

Partielle Differentialgleichungen

Aufgabe 1

Gegeben sind in der (x,t)–Ebene die Punkte $A=(a,0)$, $B=(b,0)(a<b)$. Die Gerade durch A mit der Steigung $+1$, die Gerade durch B mit der Steigung -1 schneiden sich in C. Es bezeichne D das Innere des Dreiecks mit den Eckpunkten A,B,C.

Es ist die Funktion $u \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ vorgegeben derart, dass

$$u_{xx} - u_{tt} + u \geq 0 \quad \text{in} \quad D\,,$$

$$\left.\begin{array}{rcl} u(x,0) & \leq & M < 0 \quad (M \text{ konstant}) \\ u_t(x,0) & \leq & 0 \end{array}\right\} \; a \leq x \leq b\,,$$

gelten.

Zeigen Sie: $u(x,t) < 0$ für $(x,t) \in D$.

Aufgabe 2

Es sei

$$S = \{(x,t) \mid x \in \mathbb{R}^3,\, t \in \mathbb{R},\, t = \frac{v}{c^2}\, x_1\}$$

mit geeigneten Konstanten v und c mit $v < c$. Es liegt das Cauchy Problem mit Anfangsdaten auf S vor:

$$\begin{array}{l} u_{tt}(x,t) - c^2 \Delta u(x,t) = 0\,,\ x \in \mathbb{R}^3\,,\ t \in \mathbb{R}\,, \\ u(x,t) = \varphi(x)\,,\ u_t(x,t) = \psi(x)\,,\ (x,t) \in S\,. \end{array}$$

Schreiben Sie das Problem in den wie folgt definierten neuen Koordinaten x', t' :

$$x_1' = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\,,\ x_2' = x_2\,,\ x_3' = x_3\,,\ t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\,.$$

– bitte wenden –

Aufgabe 3

Für $n = 1, 2, 3$ liegt das Problem für $u = u(x, t)$ vor:

$$(P) \qquad \begin{cases} u_{tt} - \Delta_n u = 0\,, \ x \in \mathbb{R}^n \ \ t > 0\,, \\ u(x, 0) = \varphi(x)\,, \ u_t(x, 0) = \psi(x)\,, \ x \in \mathbb{R}^n\,. \end{cases}$$

Es sei $\chi_1(x) := \begin{cases} 1 & , \quad \|x\| \le 1\,, \\ 0 & , \quad \|x\| > 1\,. \end{cases}$

a) Es sei u die Lösung von (P) mit $\varphi = 0,\ \psi = \chi_1$. Berechnen Sie $u(0, t)$, $t \ge 0$.

b) Es sei u die Lösung von (P) mit $\varphi = \chi_1,\ \psi = 0$. Berechnen Sie $u(0, t)$, $t \ge 0$.

Aufgabe 4

Berechnen Sie $u(x, t)$, $x > 0$, $t > 0$:

$$u_{xx} - u_{tt} = 0\,,\ x > 0,\, t > 0\,,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} \cos \pi(x - 3) & , \quad |x - 3| < \dfrac{1}{2}\,, \\[2ex] 0 & , \quad |x - 3| > \dfrac{1}{2}\,,\ x > 0\,, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u_t(x, 0) &= 0 \quad , \quad x > 0\,, \\ u(0, t) &= 0 \quad , \quad t > 0\,. \end{aligned}$$