I,1: Besprechung und Herleitung der

1/ Kontinuitätsgleichung der Hydrodynamik (Massenerhaltung in einer strömenden Flüssigkeit)

$$\nabla\cdot(\rho v)(x,t)+\rho_t(x,t)=0,\ x\in \mathcal{F}\subset\mathbb{R}^3,\ t\in\mathbb{R}$$

$\rho=\rho(x,t)$ ist die Massendichte der mit der Geschwindigkeit $v=v(x,t)$ strömenden Flüssigkeit (Achtung: ∇ wirkt nur auf die Ortsvariablen x).

2/ Transport einer Substanz der Konzentration $u=u(x,t)$ im Wasser mit der Geschwindigkeit c nach rechts: längs der x-Achse $cu_x(x,t)+u_t(x,t)=0,\ x\in\mathbb{R},\ t\in\mathbb{R}$

3/ Wärmeleitungsgleichung (Diffusionsgleichung)

$$\sigma\rho\, u_t(x,t)=\nabla\cdot(k\nabla u)(x,t),\ x\in G\subseteq\mathbb{R}^3,\ t\in\mathbb{R}$$

(Erhaltung der Wärmemenge in einem 3-dim Volumen mit konst Dichte ρ, konst spezif Wärme σ und Wärmeleitfähigkeit k) $u=u(x,t)$ ist die Temperatur an der Stelle x zur Zeit t)

4/ Wellengleichung (1-dim schwingende Saite)

$$u_{tt}(x,t)-\frac{H}{\rho(x)}u_{xx}(x,t)=\frac{1}{\rho(x)}\varphi(x,t),\ x\in\mathbb{R},\ t\in\mathbb{R}$$

$u(x,t)$ ist vertikale Auslenkung aus der Ruhelage = x-Achse an der Stelle x zur Zeit t, φ ist Dichte einer äußeren Kraft, $\rho(x)$ lineare Massendichte, H Kraft in der elastischen Saite.

I,2: 1/ gesucht $u=u(\overset{x}{\overbrace{x_1,x_2}})$ mit $u_{x_1x_2}(x)=\alpha$ (konst)

$$u(x)=\alpha x_1x_2+w(x_1)+v(x_2)$$ mit beliebigen C^1 Fktn v,w.

2/ $a\cdot(Du)(x)=\alpha$, $Du(x)=(u_{x_1},\dots,u_{x_n})$, $a\in\mathbb{R}^n$, $\alpha\in\mathbb{R}$ konstant.

A sei reguläre (n,n)-Matrix mit den Spalten a_j, $j=1,\dots,n$. $a_1:=a$, a_j ($j=2,\dots,n$) beliebig. Mit $x=A\xi$ und $v(\xi)=u(A\xi)$ wird die DGL zu: $v_{\xi_1}(\xi)=\alpha$ $\to$

$$u(x)=v(A^{-1}x)=\alpha(A^{-1}x)_1+w((A^{-1}x)_2,(A^{-1}x)_3,\dots,(A^{-1}x)_n)$$

$w\in C^1$ beliebig.

(weiter mit Z1/(I,2))

Anwendung von 2) auf die Gleichungen $\underline{u_t \pm c u_x = 0}$ gibt die Lösungen $u(x,t) = w(x \mp ct)$, $w \in C^1$ beliebig.

3) Ist $z = u(x,t)$ Lösung von $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$, so ist $v(\xi_1,\xi_2) = u\left(A\binom{\xi_1}{\xi_2}\right)$ mit $A = \begin{pmatrix} c & c \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ Lösung von $v_{\xi_1\xi_2} = 0$ und umgekehrt.

Hieraus ergibt sich der Satz (in der Vorlesung Satz 4): Jede Lösung der Gleichung $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ hat die Form $u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)$ mit beliebigen Funktionen F, G.

4) (d'Alembertsche Formel) (folgt z.B. aus 3) (siehe 2. Übblatt)

Es seien $g \in C^2$ und $h \in C^1$. Das Problem

$$u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0,\ (x,t) \in \mathbb{R}^2;\quad u(x,0) = g(x),\ u_t(x,0) = h(x),\ x \in \mathbb{R}$$

besitzt genau die Lösung: $u(x,t) = \frac{1}{2}(g(x+ct) + g(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(\tau)\,d\tau$.

5) Satz (Sätze 1,2,3 der Vorlesung)

Es seien $g \in C^1(\mathbb{R})$, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ gegeben. Das Problem

$$u_t(x,t) - c u_x(x,t) = f(x,t),\ (x,t) \in \mathbb{R}^2,\quad u(x,0) = g(x),\ x \in \mathbb{R}$$

besitzt genau die Lösung $u(x,t) = g(x+ct) + \int_0^t f(x+c(t-s),s)\,ds$.

6) Lösen von $u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t)$ (*) durch Umschreiben dieser Gleichung in ein System von Gleichungen 1. Ordnung, auf die der Satz vorher angewendet wird. (Verwendet wird $(\partial_t^2 - c^2\partial_x^2) = (\partial_t - c\partial_x)(\partial_t + c\partial_x)$). Es gilt:

u löst (*) $\Longleftrightarrow$ u löst
$$u_t + c u_x = v(x,t)$$
$$v_t - c v_x = f(x,t).$$

7/ Methode von Duhamel zur Lösung von

$u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = f(x,t)$ $(x \in \mathbb{R}, t \geq 0)$, $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$ $(x \in \mathbb{R})$.

Die Lösung $u(x_0,t_0)$ $(x_0 \in \mathbb{R}, t_0 > 0)$ erhält man so:

Berechne für jedes s mit $0 \leq s \leq t_0$ und $x \in \mathbb{R}$ die Lösung $w(x,t;s)$ des Problems: $v_{tt}(x,t) - c^2 v_{xx}(x,t) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, $t \geq s$,
$v(x,s) = 0$, $v_t(x,s) = f(x,s)$, $x \in \mathbb{R}$. Dies wird mit 4) Z2 behandelt

Es gilt dann
$$u(x_0,t_0) = \int_{s=0}^{t_0} w(x_0,t_0;s)\,ds = \frac{1}{2c}\int_{s=0}^{t_0}\int_{\tau = x_0 - c(t_0-s)}^{x_0+c(t_0-s)} f(\tau,s)\,d\tau\,ds.$$

Bemerkung: Dies, addiert zur Lösung aus 4/(Z2), liefert die Darstellung der Lösung für: $u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t)$, $u(x,0) = g(x)$, $u_t(x,0) = h(x)$

8/ Satz: Es sei $v = v(x,y,t) \in C^1(D \times I)$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $I \subset \mathbb{R}$, gegeben.
Die Lösungen $u = u(x,y)$ der quasilinearen Gleichung
$$u_x(x,y)\,v_y(x,y,u(x,y)) - u_y(x,y)\,v_x(x,y,u(x,y)) = 0, \quad (x,y) \in D,$$
können in impliziter Form wie folgt angegeben werden:
$u(x,y) = w(v(x,y,u(x,y)))$ mit einer beliebigen C^1-Funktion w.

Beispiel Lösungen der Gleichung $\alpha(u(x,y))u_x(x,y) - \beta(u(x,y))u_y(x,y) = 0$ mit gegebenen Funktionen $\alpha = \alpha(t)$, $\beta = \beta(t)$ sind
$$u(x,y) = w(\alpha(u(x,y))\,y + \beta(u(x,y))\,x), \quad w \text{ beliebig}.$$

Beginn einer Literaturliste (PDE = Partial Differential Equation)

[1] Folland Introduction to PDEs Princeton Academic Press 1995

[2] John PDEs Springer (4th edition)

[3] Courant Hilbert Methods of Math Physics, Vol II Wiley Classics 1989

[4] Zauderer PDEs of Applied Maths Wiley 1989

[5] Evans PDEs American Math Soc 1998

[6] Epheser/Peschl PDGln 1. Ordnung HTB 87 1972