Kapitel V Zur Potential/Laplace Gleichung

$$\Delta_n u(x) = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}^2 u = \nabla\cdot\nabla u \qquad // \text{ hier } n=2,3$$

Satz 1 Gaußscher Integralsatz im $\mathbb{R}^3$

$G \subseteq \mathbb{R}^3$ sei beschränktes Gebiet, ∂G sei stückweise aus C^1 ("$G \in C^1$")

$w : \overline{G} \to \mathbb{R}^3$ sei $C^1(G) \cap C^0(\overline{G})$. $n(x), x \in \partial G$, sei der äußere Einheitsnormalenvektor auf ∂G. Es gilt:

$$\int_G \nabla\cdot w \, d\tau = \int_{\partial G} w\cdot n \, do .$$

Folgerungen 1.1:
$$\int_G \Delta u \, d\tau = \int_{\partial G} D_n u \, do \quad , \; u \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$$

1.2:
$$\int_{\partial G} D_n u \, do = 0 \quad , \; u \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G}), \; \Delta u = 0 \text{ in } G$$

1.3:
$$\int_G \nabla u \, d\tau = \int_{\partial G} u\, n \, do \quad , \; u \in C^1(G) \cap C^0(\overline{G})$$

Satz 2 (1. Greensche Formel)

$G \in C^1$, $u \in C^1(G) \cap C^0(\overline{G})$, $v \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$:

$$\int_G (\nabla u \cdot \nabla v + u \Delta v) \, d\tau = \int_{\partial G} u \, D_n v \, do .$$

Satz 3 (2. Greensche Formel)

$G \in C^1$; $u, v \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$:

$$\int_G (u \Delta v - v \Delta u) \, d\tau = \int_{\partial G} (u D_n v - v D_n u) \, do .$$

Satz 4: $G \in C^1$, $f \in C^0(G)$, $g \in C^0(\partial G)$. Das innere Dirichlet Problem

(D) $\quad \Delta u = f$ in G, $\; u = g$ auf ∂G

besitzt in $C^2(G) \cap C^0(\overline{G})$ höchstens eine Lösung.

Satz 5: $G \in C^1$, $f \in C^0(G)$, $g \in C^0(\partial G)$. Sind $u_1, u_2 \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$ Lösungen des inneren Neumann Problems

(N) $\quad \Delta u = f$ in G, $\; D_n u = g$ auf ∂G,

so gilt $u_1 - u_2 = \text{const}$ auf $\overline{G}$.

Bemerkung: (Aus Folgerung 1.1 oben ergibt sich)

Notwendig dafür, dass (N) lösbar ist, ist die Bedingung

$$\int_G f \, d\tau = \int_{\partial G} g \, do.$$

$x \in \mathbb{R}^3, \ r > 0$:

$$y \in S(x,r) \Longleftrightarrow \|y-x\| = r \Longleftrightarrow y = x + r \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin\vartheta \\ \sin\varphi \sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} = x + r\, n(\vartheta,\varphi)$$

$$0 \le \vartheta \le \pi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

$y \in B(x,r) \Longleftrightarrow \|y-x\| < r \Longleftrightarrow$ mit $\rho := \|y-x\|$ gilt

$$y = x + \rho\, n(\vartheta,\varphi)$$

Oberflächenelement von $S(x,r)$ in Kugelkoordinaten: $d\sigma = r^2 \sin\vartheta \, d(\vartheta,\varphi)$

" " $S(0,1)$ " " : $d\omega = \sin\vartheta \, d(\vartheta,\varphi)$

Volumenelement in Kugelkoordinaten: $d\tau = r^2 \sin\vartheta \, d(r,\vartheta,\varphi)$

Satz 6: $f \in C(\mathbb{R}^3)$.

a) $$\int_{B(x,r)} f(y)\, d\tau = \int_{\rho=0}^{r} \Big(\int_{y \in S(x,\rho)} f(y)\, d\sigma \Big) d\rho$$

b) $$\int_{S(x,\rho)} f(y)\, d\sigma = \rho^2 \int_{\substack{\|n\|=1 \\ (n \in S(0,1))}} f(x+\rho n)\, d\omega$$

c) $$\int_{B(0,r)} f(\|y\|)\, d\tau = 4\pi \int_0^r f(\rho)\rho^2 \, d\rho$$

Satz 7 (1. Mittelwerteigenschaft (MWE) harmonischer Funktionen)

$G \subseteq \mathbb{R}^3$ sei eine offene Menge; $u \in C^2(G)$ sei in G harmonisch und $x \in G$ beliebig. Dann gilt

$$u(x) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{y \in S(x,r)} u(y)\, d\sigma \qquad (*)$$

für jede Kugel $B(x,r)$ mit $\overline{B(x,r)} \subset G$.

Satz 8 (2. MWE harmonischer Funktionen)

G, u, x wie in Satz 7. Es gilt $u(x) = \frac{3}{4\pi r^3} \int_{y \in B(x,r)} u(y)\, d\tau \quad (**)$

für jede Kugel $B(x,r)$ mit $\overline{B(x,r)} \subset G$.

Def: Die in der offenen Menge $G \subset \mathbb{R}^3$ stetige Funktion u besitzt in G die MWE, falls für jedes $x \in G$ und jede Kugel $B(x,r)$ mit $\overline{B(x,r)} \subset G$ $(*)$ oder $(**)$ gilt.

Satz 9 $u \in C^2(G)$ besitze in G die MWE. Dann ist u in G harmonisch.

Satz 10 u besitze in G die MWE. Dann gilt $u \in C^\infty(G)$.

Satz 11 (Maximumprinzip)

$G \subset \mathbb{R}^3$ sei ein Gebiet und $u : G \to \mathbb{R}$ besitze in G die MWE. Dann gilt: Nimmt u in $x_0 \in G$ das Maximum an, so ist u in G konstant $(= u(x_0))$.

Folgerung (Mini-Max Prinzip für harmonische Funktionen)

$G \subset \mathbb{R}^3$ sei ein beschränktes C^1-Gebiet (Normalgebiet: Satz von Gauß anwendbar). Es sei $u \in C^2(G) \cap C^0(\overline{G})$ in G harmonisch. Dann nimmt u das Maximum und das Minimum auf ∂G an.