Satz von Liouville (Anwendung der 2. MWE)

Eine im $\mathbb{R}^3$ beschränkte harmonische Funktion ist konstant.

Erinnerung an rotationssymmetrische Lösungen von $\Delta_n u = 0$ / 10. Ü, A2:

Es sei $x \in \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ fest.

$$v(y) := \begin{cases} \ln \|y-x\| & , n=2 \\ \frac{1}{2-n} \|y-x\|^{2-n} & , n \geq 3 \end{cases}$$ sind für $y \neq x$ im $\mathbb{R}^3$ harmonisch

---

(*) Es gelten: $\int\limits_{B(x,\varepsilon)} \frac{d\tau}{\|y-x\|} = 2\pi\varepsilon^2$, $\int\limits_{S(x,\varepsilon)} \frac{do}{\|y-x\|} = 4\pi\varepsilon$ $(B(x,\varepsilon), S(x,\varepsilon) \subset \mathbb{R}^3)$

Satz 1 (ab hier neue Nummerierung in diesem Kapitel)

Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit genügend glattem Rand (G Normalgebiet, $G \subset C^1$). Es sei $x \in G$ beliebig, fest. Dann gilt für jede Funktion $u \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$, für die Δu über G integrabel ist:

$$4\pi u(x) = \int\limits_{\partial G} \left[\frac{1}{\|y-x\|} D_n u(y) - u(y) D_n\left(\frac{1}{\|y-x\|}\right)\right] do - \int\limits_{G} \frac{\Delta u(y)}{\|y-x\|} d\tau .$$

n ist die für G nach außen gerichtete Einheitsnormale auf ∂G.

Bew: Wende die 2. Greensche Formel (Satz 3, Z19) auf $G \setminus \overline{B(x,\varepsilon)}$ $(\varepsilon > 0$ so klein, dass $\overline{B(x,\varepsilon)} \subset G)$ mit u aus dem Satz und $v(y) = \frac{1}{\|y-x\|}$ (siehe oben) an. Bilde $\lim\limits_{\varepsilon \to 0}$.

Verwende (*) oben.

Satz 2 (Satz 1 für $n=2$)

Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Normalgebiet und $x \in G$ beliebig, fest. Es gilt für jede Funktion $u \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$, für die Δu über G integrabel ist

$$2\pi u(x) = \int\limits_{\partial G} [u(y) D_n(\ln\|y-x\|) - \ln\|y-x\| (D_n u)(y)] ds$$

$$+ \int\limits_{G} (\ln\|y-x\|) \Delta u(y) \, do$$

(weiter [21])

$$S(y,x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln\|y-x\| & n=2 \\ \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|y-x\|} & n=3 \end{cases}$$ heißt die Singularitätenfunktion der Potentialgleichung

Ist $u \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$ und $\varphi = \varphi(\cdot, x)$ harmonisch in G und aus $C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$,

so gilt nach der 2. Greenschen Formel

$$0 = \int_{y \in \partial G} [\varphi(y,x) D_n u(y) - u(y) D_{n_y} \varphi(y,x)] d\sigma_y - \int_{y \in G} \varphi(y,x) \Delta u(y) d\tau_y$$

Wir addieren diese Gleichung zu der Darstellungsformel aus Satz 1 (Satz 2) und setzen dabei

$g(y,x) := S(y,x) + \varphi(y,x)$: jede solche Funktion heißt Grundlösung der Potentialgleichung in G.

Wir erhalten zusammenfassend den

Satz 3

Es sei $G \subset \mathbb{R}^3 (\mathbb{R}^2)$ ein Normalgebiet und $x \in G$ beliebig, fest. Dann gilt für jede Funktion $u \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$, für die Δu über G integrabel ist, und für jede Grundlösung $g(\cdot, x)$ die Darstellungsformel

(D) $$u(x) = \int_{\partial G} [g(y,x) D_n u(y) - u(y) D_{n_y} g(y,x)] d\sigma_y - \int_G g(y,x) \Delta u(y) d\tau_y, \quad x \in G.$$

---

weiter mit der Literaturliste:

[21] Burg, Haf, Wille — Höhere Math. für Ingenieure Band V — Teubner 1991

[22] Walter, W — Einführung in die Potentialtheorie — BI 1971

[23] Leis, R — Vorlesungen über PDGln 2. Ordnung — BI 1967

[24] Michlin, S.G. — PDGln in der mathem. Physik — Harri Deutsch 1978

Bemerkung (Anwendung von Satz 3)

Es sei $f \in C^2(\overline{G})$. Dann gilt: Für

$$u(x) := -\int_G \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|y-x\|} f(y)\,d\tau, \quad x \in G, \text{ gilt } \Delta_3 u(x) = f(x),\ x \in G.$$

Def: $\Gamma(\cdot, x)$, $x \in G$, heißt Greensche Funktion 1. Art für Δ und G, wenn erfüllt sind:

1. $\Gamma(\cdot, x)$ ist Grundlösung der Potentialgleichung in G:

d.h. $\Gamma(\cdot, x) \in C^2(G \setminus \{x\}) \cap C^1(\overline{G} \setminus \{x\})$, $\Delta_y \Gamma(y, x) = 0$ $(y \neq x, y \in G)$,

$\Gamma(\cdot, x) - S(\cdot, x) \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$

2. $\Gamma(y, x) = 0$, $y \in \partial G$.

Bemerkung: Zu einem Gebiet G gibt es höchstens eine Greensche Funktion.

Satz 4: Für das Gebiet G existiere die Greensche Funktion Γ. Es sei $u \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$ und Δu sei über G integrierbar. Dann gilt

$$\text{(D)} \quad u(x) = -\int_G \Gamma(y,x)\,(\Delta u)(y)\,d\tau - \int_{\partial G} u(y)\, D_{n_y} \Gamma(y,x)\, d\sigma_y, \quad x \in G.$$

Satz 5: Es seien $x \neq y$, $\|x\| < R$, $\|y\| \leq R$. Dann ist

$$\Gamma(y,x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi}\left(\dfrac{1}{\|y-x\|} - \dfrac{1}{\frac{\|x\|}{R}\left\|y - \frac{R^2}{\|x\|^2}x\right\|}\right), & x \neq 0 \\[2ex] \dfrac{1}{4\pi}\left(\dfrac{1}{\|y\|} - \dfrac{1}{R}\right), & x = 0, \end{cases}$$

die Greensche Funktion für $B(0,R)$ $(\subset \mathbb{R}^3)$. Es gilt für $y \neq x$, $y, x \in B(0,R)$: $\Gamma(y,x) = \Gamma(x,y)$.