Aus Satz 4 mit Γ aus Satz 5 erhält man für $G = B(0,R) \subset \mathbb{R}^3$:

Satz 6 (Poissonsche Integralformel)

Es sei $u \in C^2(B(0,R)) \cap C^1(\overline{B(0,R)})$ in $B(0,R)$ harmonisch. Dann gilt

$$u(x) = \frac{R^2 - \|x\|^2}{4\pi R} \int_{\|y\|=R} \frac{u(y)}{\|y-x\|^3}\, do_y, \quad \|x\| < R.$$

Für $H(y,x) := \dfrac{R^2 - \|x\|^2}{4\pi R^2 \|y-x\|^3}$, $x \neq y$, gelten:

(1) $1 = \int_{\|y\|=R} H(y,x)\, do_y$, $\|x\| < R$ (Satz 6 mit $u = 1$)

(2) $H \in C^\infty$ $(x \neq y)$

(3) $H > 0$, $\|y\| = R$, $\|x\| < R$

(4) $\Delta_x H(x,y) = 0$ für $\|y\| = R$, $\|x\| < R$

(5) Es seien $y_0 \in S(0,R)$ und $\delta > 0$ $(\delta < R)$ und $M_\delta = \overline{B(0,R)} \setminus B(y_0,\delta)$.

Es gilt: $\lim\limits_{\substack{x \to y_0 \\ \|x\| < R}} H(y,x) = 0$ gleichmäßig für $y \in M_\delta$.

Aus (1) – (5) erhält man den

Satz 7 (Poissonscher Integralsatz. Lösung des Dirichlet Problems für $B(0,R)$ in $\mathbb{R}^3$)

Es sei f auf $S(0,R)$ definiert und stetig. Es gilt dann:

Die durch

$$u(x) := \begin{cases} \int_{\|y\|=R} H(y,x) f(y)\, do_y &, \|x\| < R, \\ f(x) &, \|x\| = R \end{cases}$$

auf $\overline{B(0,R)}$ definierte Funktion u ist in $B(0,R)$ harmonisch und in $\overline{B(0,R)}$ stetig.

Harmonische Funktionen in unbeschränkten Gebieten

$x_0 \in \mathbb{R}^n$ $(n=2,3)$ und $G \subseteq \mathbb{R}^n$ sei eine offene Umgebung von x_0.

Def 1 Eine in $G \setminus \{x_0\}$ harmonische Funktion u besitzt in x_0 eine hebbare Singularität, wenn u in x_0 so definiert werden kann, dass die auf G erweiterte Funktion in G harmonisch ist.

Satz 1: Es sei u in $G \setminus \{x_0\}$ harmonisch. Es gelte

$$\begin{cases} \text{für } n=3 & u(x) = o(\|x-x_0\|^{-1}) \\ \text{für } n=2 & u(x) = o(\ln\|x-x_0\|) \end{cases} \quad (x \to x_0).$$

Dann hat u in x_0 eine hebbare Singularität.

Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ $(n=2,3)$ ein Gebiet und $0 \notin G$.

$G^* := \{\xi \mid \xi = \frac{x}{\|x\|^2}, x \in G\}$. Es gilt $G = G^{**}$.

Einer auf G definierten Funktion u wird die Kelvintransformierte $u^*: G^* \to \mathbb{R}$ durch

$$u^*(\xi) := \|\xi\|^{2-n} u\left(\frac{\xi}{\|\xi\|^2}\right) \qquad (n=2,3)$$

zugeordnet. Es gelten: $u = u^{**}$ und

(10. Ü/A4) u ist in G harmonisch $\Leftrightarrow$ u^* ist in G^* harmonisch.

Def 2: Es sei u harmonisch für $\|x\| > R$. Dann heißt u harmonisch im Unendlichen, falls u^* in 0 eine hebbare Singularität hat.

Satz 2: Ist u für $\|x\| > R$ harmonisch und gelten für $\|x\| \to \infty$: $u(x) = o(1)$ $(n=3)$ bzw. $u(x) = o(\ln\|x\|)$ $(n=2)$, dann ist u harmonisch im Unendlichen.

Satz 3: Es sei u harmonisch für $\|x\| > R$ und harmonisch im Unendlichen. Dann gelten für $\|x\| \to \infty$: $u(x) = O(\|x\|^{2-n})$, $u_{x_k}(x) = O\left(\frac{1}{\|x\|^2}\right)$ $(n=2,3)$.

Folgerung: Ist u für $\|x\| > R$ harmonisch, so ist u harmonisch im Unendlichen genau dann, wenn für $\|x\| \to \infty$ und $n=2,3$ $u(x) = O(\|x\|^{2-n})$ gilt.