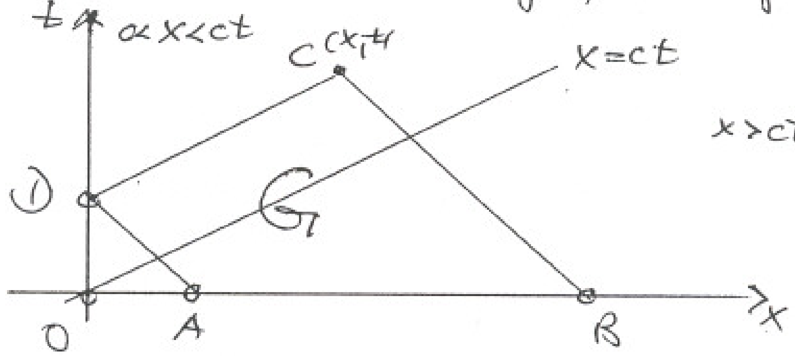
Kap VI Das Cauchy Problem für die 2-/3-dim Wellengleichung

2) Ein Anfangswert–, Randwert–Problem für die 1-dim Wellengleichung

Es seien φ, ψ für $x \geq 0$ definierte Funktionen. $\varphi \in C^2, \psi \in C^1$.
$c > 0$, konstant.

(P) Gesucht ist $u = u(x,t)$, $x \geq 0, t \geq 0$ mit
$u \in C^2((x>0)\times(t>0)) \cap C^0((x\geq 0)\times(t\geq 0))$, $u_t \in C^0((x>0)\times(t\geq 0))$
und
$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad , x > 0, t > 0$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \; u_t(x,0) = \psi(x) \quad , x > 0$$
$$u(0,t) = 0 \quad , t > 0$$

Integriere $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ für $0 < x < ct$ über das skizzierte Gebiet $G = (ABCD)$ und wende den Gaußschen Integralsatz an:



BC, CD, DA sind Charakteristiken

Satz 1: u mit

(L)
$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\varphi(x-ct) + \varphi(x+ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\sigma)\,d\sigma, & 0 < ct < x, \\ \frac{1}{2}(\varphi(x+ct) - \varphi(ct-x)) + \frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{x+ct} \psi(\sigma)\,d\sigma, & 0 < x < ct, \end{cases}$$

ist eine C^2-Lösung von (P), die die A-Werte und R-Werte stetig annimmt, wenn
$$\varphi \in C^2, \psi \in C^1 \text{ für } x \geq 0 \text{ und } \varphi(0) = \psi(0) = \varphi''(0) = 0$$
erfüllt sind.

2. Das Cauchy Problem für die homogene Wellengleichung im $\mathbb{R}^3$

a) Es seien φ, ψ genügend glatte auf $\mathbb{R}^3$ definierte Funktionen und für $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times (t>0)) \cap C^1(\mathbb{R}^3 \times (t \geq 0))$ seien erfüllt:

(1) $u_{tt}(y,t) - c^2 \Delta_3 u(y,t) = 0 \quad , y \in \mathbb{R}^3, t>0$

(2) $u(y,0) = \varphi(y) \quad$, (3) $u_t(y,0) = \psi(y) \quad , y \in \mathbb{R}^3$.

Ist $x \in \mathbb{R}^3$ beliebig, fest, so erhält man durch Integration von (1) über $B(x,r)$ ($r>0$ fest / beliebig) für $M_u(r,t;x) := \frac{1}{4\pi} \int_{\|n\|=1} u(x+rn,t)\, d\omega$ die Gleichung

$$\partial_t^2(r M_u(r,t;x)) - c^2 \partial_r^2 (r M_u(r,t;x)) = 0, \quad r>0, t>0, x \in \mathbb{R}^3,$$

und für $\mathcal{U}(r,t) := r M_u(r,t;x)$ ein Problem wie auf Z25:

$$\begin{cases} \mathcal{U}_{tt} - c^2 \mathcal{U}_{rr} = 0, & r>0, t>0, \\ \mathcal{U}(r,0) = r M_\varphi(r;x), \ r>0, & \mathcal{U}_t(r,0) = r M_\psi(r;x), \ r>0, \\ \mathcal{U}(0,t) = 0 & , t>0 \end{cases}$$

Mit (L) aus Satz 1/Z25 und $u(x,t) = M_u(0,t;x) = \partial_r \mathcal{U}(r,t)|_{r=0}$ findet man:

Satz 2: Jede C^2-Lösung u des AWP (1), (2), (3) wird durch die Formel

(F) $\quad u(x,t) = \partial_t (t M_\varphi(ct,x)) + t M_\psi(ct,x)$ gegeben.

b) Satz 3: Hat man $\varphi \in C^3$ und $\psi \in C^2$, so werden durch die durch (F) definierte Funktion u (1), (2), (3) erfüllt.

Zum Nachweis verwendet man den folgenden Hilfssatz (H):

Für $h \in C^2(\mathbb{R}^3)$ und $u_h(x,t) := t M_h(ct;x)$ gelten:

$$(u_h)_{tt}(x,t) - c^2 \Delta u_h(x,t) = 0 \quad , x \in \mathbb{R}^3, t>0$$

$$u_h(x,0) = 0, \ (u_h)_t(x,0) = h(x) \quad , x \in \mathbb{R}^3.$$