3. Das Cauchy Problem für die homogene Wellengleichung im $\mathbb{R}^2$. Absteigemethode

Es sei $\bar{u} = \bar{u}(x_1,x_2,x_3,t)$, $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3, t \geq 0$, Lösung des Problems

$(w_{tt} - c^2 \Delta_3 w)(x_1,x_2,x_3,t) = 0$ auf $\mathbb{R}^3 \times (t>0)$

$w(x_1,x_2,x_3,0) = \varphi(x_1,x_2)$, $w_t(x_1,x_2,x_3,0) = \psi(x_1,x_2)$ $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3)$

dann gilt für

$$u(x_1,x_2,t) := \bar{u}(x_1,x_2,0,t), \quad x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2, t \geq 0$$

$$u_{tt}(x,t) - c^2 \Delta_2 u(x,t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, t > 0$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Satz 4
Mit (F)/Z26 erhält man für $(x,t) \in \mathbb{R}^2 \times (t \geq 0)$, $\varphi \in C^3(\mathbb{R}^2)$, $\psi \in C^2(\mathbb{R}^2)$

$$u(x,t) = \partial_t \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int\limits_{\|(y_1,y_2,y_3)-(x_1,x_2,0)\|=ct} \varphi(y_1,y_2)\, d\sigma_{(y)} \right) + \frac{1}{4\pi c^2 t} \int\limits_{\|\cdots\|=ct} \psi(y_1,y_2)\, d\sigma_{(y)}$$

$$= \partial_t \left(\frac{1}{2\pi c} \int\limits_{\|y-x\|<ct} \frac{\varphi(y)}{\sqrt{c^2t^2 - \|y-x\|^2}}\, d(y_1,y_2) \right) + \frac{1}{2\pi c} \int\limits_{\|y-x\|<ct} \frac{\psi(y)\, d(y_1,y_2)}{\sqrt{c^2t^2 - \|y-x\|^2}}$$

---

4. Das inhomogene Cauchy Problem. Duhamel Methode $(n=1,2,3)$

Zur Lösung des Problems
$$\text{(PI)} \begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta_n u(x,t) = f(x,t), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0 & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

löse für jedes η: $0 < \eta < t$:

(P_η) $\quad u_{tt}(x,t) - c^2 \Delta_n u(x,t) = 0$, $x \in \mathbb{R}^n, t > \eta$; $u(x,\eta) = 0$, $u_t(x,\eta) = f(x,\eta)$, $x \in \mathbb{R}^n$

Satz 5 (Duhamel)

Ist $w = w(x,t;\eta)$ die Lösung von (P_η), so ist $u(x,t) = \int\limits_{\eta=0}^{t} w(x,t;\eta)\, d\eta$

die Lösung für (PI).

Führt man dies für $n=3$ (Sätze 2/3) durch, so erhält man als Lösung von (PI) die retardierten Potentiale

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi c^2} \int\limits_{\|y-x\|<ct} \frac{f\left(y, t - \frac{\|y-x\|}{c}\right)}{\|y-x\|}\, d\tau_y, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times (t>0).$$

5. Ein Eindeutigkeitssatz

Satz 6

$(n=1,2,3)$ Aus $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times (t \geq 0))$ und $u_{tt} - c^2 \Delta_n u(x,t) = 0$, $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (t>0)$, $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$ für $x \in \overline{B(x_0, ct_0)}$ folgt $u(x,t) = 0$ für alle (x,t) mit $\|x - x_0\| \leq c(t_0 - t)$, $0 \leq t \leq t_0$

Bew: Mit $B_t := \{x \in \mathbb{R}^n / \|x - x_0\| \leq c(t_0 - t)\}$ für $0 \leq t \leq t_0$ wird gezeigt, dass $E(t) := \frac{1}{2} \int\limits_{B_t} (u_t^2(x,t) + c^2 \|\nabla_x u(x,t)\|^2) d\tau_{(x)} = 0$ für $0 \leq t \leq t_0$ ist.

6. $(n=1,2,3)$ $(\Box_n u(x,t) = 0,\ (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (t>0),\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x)\ (x \in \mathbb{R}^n))$

Das Abhängigkeitsgebiet $\mathcal{A}_n(x,t)$ $((x,t) \in \mathbb{R}^n \times (t \geq 0))$ ist der Bereich auf $\mathbb{R}^n \times (t=0)$, in dessen Punkten die Werte von φ und ψ bekannt sein müssen, um die Lösung von $\Box_n u(x,t) = 0$ in (x,t) berechnen zu können:

$$\mathcal{A}_1(x,t) = \{y \in \mathbb{R} / |y - x| \leq ct\},\quad \mathcal{A}_2(x,t) = \{y \in \mathbb{R}^2 / \|y - x\| \leq ct\},$$
$$\mathcal{A}_3(x,t) = \{y \in \mathbb{R}^3 / \|y - x\| = ct\}.$$ (mit Formeln 22/227)

Für $n = 3$ gilt das Huygensche Prinzip: Eine in einem beschränkten Gebiet $M \subset \mathbb{R}^3$ wirksame Anfangsstörung wird an der beliebigen Stelle $x \in \mathbb{R}^3$ für hinreichend große Zeiten nicht wahrgenommen. (Eine von M ausgehende Welle besitzt eine vordere und eine hintere Wellenfront)

$M \subset \mathbb{R}^n$ sei ein beschränktes Gebiet. Das Bestimmtheitsgebiet von M ist die Menge: $\mathcal{B}_n(M) := \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} / t > 0,\ \mathcal{A}_n(x,t) \subset M\}$.

Beispiele:
$$\mathcal{B}_3(\overline{B(x_0, r)}) = \{(x,t) \in \mathbb{R}^4 / \|x - x_0\| \leq r - ct,\ 0 \leq t \leq \tfrac{r}{c}\}$$
$$\mathcal{B}_2(B(x_0, r)) = \{(x,t) \in \mathbb{R}^3 / \|x - x_0\| \leq r - ct,\ 0 \leq t \leq \tfrac{r}{c}\}$$

Das Einflussgebiet $\mathcal{E}_n(M)$, $M \subset \mathbb{R}^n$ ist so definiert:
$$(x,t) \in \mathcal{E}_n(M) \iff t > 0 \text{ und } \mathcal{A}_n(x,t) \cap M \neq \emptyset.$$