9) Beispiel: $uu_x + u_y = 0$, $u(x,0) = h(x)$ mit den Lösungen $u(x,y) = h(x - u(x,y)y)$.
Ist $h'(x) > 0$ $\forall x$, so hat man für $y \geq 0$ C^1-Lösungen.
I. a. sind die Lösungen nur für kleine y aus C^1. Für $h(x) = -x$ erhält man $u(x,y) = \frac{x}{y-1}$. u ist nur für $y < 1$ definiert.

10) Für die Lösungen des Problems $c(u)u_x + u_y = 0$ $(x \in \mathbb{R}, y > 0)$, $u(x,0) = h(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ gilt: $u(c(h(s))y + s, y) = h(s)$ $(s \in \mathbb{R}, y \geq 0)$.
Im Fall $c(u) = u$ und h mit $h' < 0$ und $s_1 < s_2$ schneiden sich die Geraden $x(y) = h(s_j)y + s_j$ $(j = 1,2)$ für $Y = -\frac{s_2 - s_1}{h(s_2) - h(s_1)}$. Für $y \geq Y$ gibt es bei $x(Y)$ keine C^1-Lösung. (Schockbildung).

G_0, V seien Gebiete im $\mathbb{R}^n$, I ein Intervall in $\mathbb{R}$, $G := G_0 \times I$.
$F: G_0 \times I \times V \to \mathbb{R}$ sei eine C^2-Funktion: $F = F(x,z,p)$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in G_0$, $z \in I$, $p = (p_1, \ldots, p_n) \in V$.

Allgemeine PDGL 1. Ordnung:

Gesucht ist $u: G_0 \to I$, $u \in C^1(G_0)$ derart, dass
$$F(x, u(x), Du(x)) = 0, \quad x \in G_0, \text{ erfüllt ist.}$$

Kapitel II: Die quasilineare DGL 1. Ordnung

1) Hier ist mit gegebenen C^2-Funktionen $a: G \to \mathbb{R}^n$, $b: G \to \mathbb{R}$ $(a = a(x,z),\ b = b(x,z)\ \ x \in G_0, z \in I)$
$$F(x,z,p) = a(x,z) \cdot p - b(x,z).$$
Wir setzen voraus: $a(x,z) \neq 0$, $(x,z) \in G$.

Gesucht ist $u \in C^1(G_0)$ mit

$$(1.1) \qquad a(x, u(x)) \cdot (Du)(x) = b(x, u(x)), \quad x \in G_0$$

(Du steht für $(u_{x_1}, \ldots, u_{x_n})$).

noch Z4

Lösungen von (1) sind Flächen $\mathcal{F}$: $z = u(x)$ (n-dimensional im $(n+1)$-dimensionalen) derart, dass für jeden Punkt $(x_0, z_0) \in \mathcal{F} \subset G$ gilt: die Richtung $r(x_0, z_0) := \begin{pmatrix} a(x_0, z_0) \\ b(x_0, z_0) \end{pmatrix}$ $(\in \mathbb{R}^{n+1})$ ist tangential zu $\mathcal{F}$ in (x_0, z_0).

2) Definition: Die durch $r(x, z)$ für $(x, z) \in G$ gegebene Richtung heißt charakteristische Richtung für die DGL (1) in (x, z).
Eine reguläre (glatte) Kurve in G mit der Eigenschaft, dass jede ihrer Tangenten charakteristische Richtung hat, heißt Charakteristik der DGL (1).

Ist $x = x(t)$, $z = z(t)$ $\left(x, z \in C^1(J),\ \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{pmatrix}(t) \neq 0\ (t \in J)\right)$ eine Parameterdarstellung einer Charakteristik, so hat man bei geeigneter Wahl des Parameters:

$$(2) \begin{cases} \dot{x}(t) = a(x(t), z(t)) \\ \dot{z}(t) = b(x(t), z(t)) \end{cases}, t \in J.$$

Lösungen von (2) sind (geeignete Parameterdarstellungen von) Charakteristiken.

Ist $(x(t), z(t))$, $t \in J$, eine Charakteristik von (1), so heißt die Kurve $x = x(t)$ in G_0 die zugehörige charakteristische Grundkurve.