3) Es liegt vor die DGl. $\underline{(1)}$ $a(x,u)\cdot Du = b(x,u)$

$a, b \in C^1(G)$, $a(x,z) \neq 0$ $((x,z)\in G)$

<u>Satz 1</u>: $u \in C^1(G_0)$ ist Lösung von $\underline{(1)}$

$\longleftrightarrow$ durch jeden Punkt der Fläche $F: z = u(x)$ verläuft eine ganz in F liegende Charakteristik

("Eine Lösungsfläche ist Vereinigung von Charakteristiken. Und: Eine Fläche, die sich aus Charakteristiken aufbaut, ist eine Lösungsfläche")

<u>Folgerung</u> für die linear-homogene Gleichung $\underline{a(x)\cdot Du(x) = 0 \quad (H)}$

$u \in C^1(G_0)$ ist Lösung von (H) in G_0

$\longleftrightarrow$ alle in G_0 verlaufenden Charakter-Grundkurven von (H) sind Höhenlinien von u.

<u>Satz 2</u>: Es sei $u \in C^1(G_0)$ eine Lösung der DGl $\underline{(1)}$, $F: z = u(x)$, und γ sei eine Charakteristik von $\underline{(1)}$.

Dann gilt: Aus $\gamma \cap F \neq \emptyset$ folgt: $\gamma \subset F$.

<u>Folgerung ($n = 2$)</u>:

F_1, F_2 seien Integralflächen von $\underline{(1)}$. Aus $P \in F_1 \cap F_2$ folgt: $F_1 \cap F_2$ ist Charakteristik von $\underline{(1)}$ durch P.

<u>Beispiele</u>:

1) $x u_x - (3x^2+y)u_y = 0$ (Lösungen: $u(x,y) = \varphi(xy + x^3)$, $\varphi \in C^1$)

2) $y u_x - x u_y = 0$ (Lösungen: $u(x,y) = \varphi(x^2+y^2)$, $\varphi \in C^1$)

3) $u u_x + u_y = 1$ (Charakteristiken erhält man als Schnitte der Flächenscharen

$z - y = c_1$, $\frac{1}{2}z^2 - x = c_2$ (c_1, c_2 konst))

(Lösungen etwa: $z = 1 \pm \sqrt{1+2x-2y}$)

4) Das Cauchysche Anfangswertproblem (AWP) für

(1) $a(x,u) \cdot Du = b(x,u)$.

(Bezeichnungen und Vor. Z4 und Z5 oben)

Es sei $v: \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{n-1} \to G_0$ aus C^1, injektiv, und es gelte (2) $\operatorname{rang}(v_{s_1}, v_{s_2}, \ldots, v_{s_{n-1}})|_{\mathcal{D}} = n-1$.

$x = v(s_1, \ldots, s_{n-1})$ ist die Parameterdarstellung einer doppelpunktfreien $(n-1)$-dim Fläche Γ im Raum der x-Variablen.

Es sei $g: \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ gegeben und C^1.

<u>AWP</u>: Gesucht ist in einer Umgebung von Γ eine Lösungsfläche von <u>(1)</u>: $z = u(x)$: die die Fläche $\mathcal{C} \subset G$,

$\mathcal{C}$: $x = v(s_1, \ldots, s_{n-1})$, $z = g(s_1, \ldots, s_{n-1})$, $(s_1, \ldots, s_{n-1}) \in \mathcal{D}$,

enthält, für die also $u(v(s_1, \ldots, s_{n-1})) = g(s_1, \ldots, s_{n-1})$, $(s_1, \ldots, s_{n-1}) \in \mathcal{D}$, erfüllt ist,

<u>Lösung</u>

Berechne zu jedem $(s_1, \ldots s_{n-1})$ die Charakteristik (Kap II 2)/(Z4):

(3) $x = x(t, s_1, \ldots, s_{n-1})$, (4) $z = z(t, s_1, \ldots, s_{n-1})$ $(t \in I, 0 \in I)$

mit $x(0, s_1, \ldots s_{n-1}) = v(s_1, \ldots s_{n-1})$, $z(0, s_1, \ldots, s_{n-1}) = g(s_1, \ldots s_{n-1})$.

Löse <u>(3)</u> nach $t, s_1, \ldots, s_{n-1}$ auf: $t = t(x)$, $s_j = s_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$ und setze in <u>(4)</u> ein:

$$z = u(x) := z(t(x), s_1(x), \ldots, s_{n-1}(x))$$ ist die lokal eindeutig bestimmte Lösung.

<u>Satz 3</u>: Sind a, b stetig diff'bar, so ist das Cauchysche AWP für <u>(1)</u> in denjenigen Punkten von $\mathcal{C}$ lokal eindeutig lösbar, in denen

(<u>5</u>) $$\Delta(s_1, \ldots, s_{n-1}) := \det\big(a(v(s_1, \ldots, s_{n-1}), g(s_1, \ldots, s_{n-1})), v_{s_1}(s_1 \ldots s_{n-1}), \ldots, v_{s_{n-1}}(\ldots)\big) \neq 0$$

gilt.

noch 26

5) Beispiele: 1) $x_1 u_{x_1} + 2x_2 u_{x_2} + u_{x_3} = 3u$,

$u(x_1, x_2, 0) = g(x_1, x_2)$.

Lösung: $z = u(x_1, x_2, x_3) = g(x_1 e^{-x_3}, x_2 e^{-2x_3})\, e^{3x_3}$

2) $u u_x + u_y = 1$,

$u(x, x) = \frac{1}{2} x$.

Lösung: $z = u(x, y) = \dfrac{2x - 4y + y^2}{2(y-2)}$ $\quad (y \neq 2)$

6) Wir setzen $\vec{s}_0 := (s_1^0, \dots, s_{n-1}^0)$ $(\in D)$ und

$(x_0, z_0) := (v(\vec{s}_0), g(\vec{s}_0))$ $(\in G)$.

Es gelte $\Delta(\vec{s}_0) = 0$.

Dann hat man

Es gibt Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ mit $a(x_0, z_0) = \sum_{\nu=1}^{n-1} \lambda_\nu v_{s_\nu}(\vec{s}_0)$.

das bedeutet: Die charakteristische Grundkurve durch x_0 berührt Γ in x_0.