Z 7 Vorlesungszusammenfassung PDGL WS 2005/06 MR

(weiter von Z 6)

7) Es gelte $\Delta(\vec{r}_0) = 0$ (Bezeichnungen Z 6, 6)).

Gibt es in einer Umgebung von (x_0, z_0) eine Lösung des AWP (4)/Z6), so berührt die Charakteristik durch (x_0, z_0) die Anfangsmannigfaltigkeit $\mathcal{C}$ in (x_0, z_0).

(Mit den λ_j aus 6) gilt zusätzlich zu 6): $b(x_0, z_0) = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \, g_{s_j}(\vec{r}_0)$)

8) Es gelte $\Delta = 0$ auf $\mathcal{C}$ und das AWP sei lösbar. Dann gilt für jeden Punkt $P(x_0, z_0)$ aus $\mathcal{C}$: Die Charakteristik durch P verläuft in $\mathcal{C}$. („$\mathcal{C}$ ist charakteristisch")

Satz 4 (Z der Ergebnisse für das AWP: Z 6 unter 4))

a) Ist längs $\mathcal{C}$ $\Delta \neq 0$, so gibt es genau eine Lösung.

b) Gilt auf $\mathcal{C}$ $\Delta = 0$, so ist das AWP genau dann lösbar, wenn $\mathcal{C}$ charakteristisch ist. In diesem Fall gibt es unendlich viele Lösungen, die alle $\mathcal{C}$ enthalten.

Beispiele: 1) $u u_x + u_y = 1$, $u(x^2, 0) = x \; (>0)$

mit der Lösung: $z = \frac{y}{2} + \sqrt{x - \frac{y^2}{4}}$, $x > 0$, $x \geq \frac{y^2}{4}$.

2) $u u_x + u_y = 1$, $u(\frac{x^2}{2}, x) = x$

mit Lösungen in impliziter Form $\frac{1}{2} z^2 - x = \varphi(z - y)$, wobei $\varphi \in C^1$ und beliebig ist und $\varphi(0) = 0$ erfüllt.

Fortsetzung der Literaturliste (von Z 3)

[7] Strauss — PDEs. An Introduction — Wiley 1992

[8] Garabedian — PDEs — Wiley 1964

[9] Logan — An Introduction to Nonlinear PDEs — Wiley 1994

[10] Di Benedetto — PDEs — Birkhäuser 1995

[11] Kamke — Differentialgleichungen reeller Funktionen — Leipzig 1952

Kap III Die allgemeine DGL 1. Ordnung: (1) $F(x, u(x), Du(x)) = 0$, $x \in G_0$
(Bezeichnungen/Def Z4 vor Kap II)

3.1 Def: $z = u(x, a) \in C^2(G_0 \times A)$ ($A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist offen)
heißt vollständiges Integral von (1), falls
1. für jedes $a \in A$ $u(\cdot, a)$ eine Lösung von (1) ist,
2. $\operatorname{rang} \underbrace{[u_a, u_{x_1 a}, \ldots, u_{x_n a}]}_{(n, n+1)-\text{Matrix}} = n$ gilt. $\left(u_a = \begin{pmatrix} u_{a_1} \\ \vdots \\ u_{a_n} \end{pmatrix}\right)$.

Bemerkungen
— 2. beinhaltet, dass die Parameter $a = (a_1, \ldots, a_n)$ in $u(x, a)$ unabhängig sind
— 2. beinhaltet auch, dass aus n der $n+1$ Gleichungen $z = u(x, a)$, $p = u_x(x, a)$ lokal a eliminiert werden kann, so dass man die DGL (1) in einer nach einer der Variablen $u, p_1, \ldots, p_n$ aufgelösten Form zurückerhält.

Beispiele für vollständige Integrale:
1. Clairaut DGL. $x \cdot Du + f(Du) = u$ ($f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben)
vollständiges Integral (v. I.): $u(x, a) = a \cdot x + f(a)$, $a \in \mathbb{R}^n$
2. Eikonal Gleichung $\|Du\| = 1$
v. I.: $u(x, a, b) = a \cdot x + b$, $a \in \mathbb{R}^n$ mit $\|a\| = 1$, $b \in \mathbb{R}$
3. Hamilton-Jacobi DGL $u_t + H(Du) = 0$
$H: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $u(x, t) = u(x_1, \ldots, x_n, t)$, $Du = (u_{x_1}, \ldots, u_{x_n})$, $t \geq 0$
v. I.: $u(x, t, a, b) = a \cdot x - tH(a) + b$, $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$

3.2 Def: Es sei $z = u(x, a) \in C^1(G_0 \times A)$. Die Vektorgleichung $u_a(x, a) = 0$ sei nach a auflösbar: $a = \phi(x)$, mit $\phi \in C^1$. $v(x) := u(x, \phi(x))$, $x \in G_0$, heißt die Einhüllende (Enveloppe) der Funktionenschar $\{u(\cdot, a), a \in A\}$.

(weiter Z8)

<u>Satz 1</u> : $u(\cdot, a)$ sei für jedes $a \in A$ Lösung der DGl (1). Die Einhüllende v der Schar $\{u(\cdot,a), a \in A\}$ existiere und sei eine C^1-Funktion. Dann ist v Lösung von (1).

<u>Beispiel:</u> Durch Hüllbildung für das vollständige Integral $u(x,a) = \pm (1-\|x-a\|^2)^{\frac{1}{2}}$, $\|x-a\| < 1$ der DGl $u^2(1+\|Du\|^2) = 1$ erhält man die Lösungen $v(x) = \pm 1$.