(weiter Z8, 3.2 / Bezeichnungen Z8)

Es sei $z = u(x,a)$ ein vollständiges Integral der DGl (1).

Wähle eine offene Menge $A' \subset \mathbb{R}^{n-1}$ und $h: A' \to \mathbb{R}$, $h \in C^1$ mit $\operatorname{graph}(h) \subset A$.

Schreibe a' für $(a_1, \dots, a_{n-1})$, also $a = (a', a_n) \in A$.

<u>Definition</u>: Das <u>allgemeine</u> (von h abhängige) <u>Integral</u> der DGl (1) ist die Einhüllende $\tilde{v} = \tilde{v}(x)$ der Lösungsschar $\{\tilde{u}(\cdot, a') := u(\cdot, a', h(a')), a' \in A'\}$, falls diese existiert und aus C^1 ist.

<u>Beispiele</u> (vgl Beispiele unter <u>3.1</u>)

1. $\sqrt{u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2} = 1$ mit $u(x_1, x_2, a_1, a_2) = x_1 \cos a_1 + x_2 \sin a_1 + a_2$.
Setze $a_2 = h(a_1) = 0$, $\tilde{u}(x_1, x_2, a_1) = x_1 \cos a_1 + x_2 \sin a_1$. Es ergibt sich $\tilde{v}(x_1, x_2) = \operatorname{sign}(x_1)\, \|(x_1, x_2)\|$ $\quad ((x_1, x_2) \neq 0)$.

2. Betrachte bei der Hamilton-Jacobi DGl $u_t + \|Du\|^2 = 0$ die Teilschar $\tilde{u}(x, t, a) = a \cdot x - t\|a\|^2$ des unter <u>3.1</u> angegebenen vollständigen Integrals. Man erhält $\tilde{v}(x,t) = \frac{1}{4t}\|x\|^2$ $(t \neq 0)$.

3.3. Das <u>charakteristische DGlsystem</u> für (1) $F(x, u(x), Du(x)) = 0$.

<u>Satz 2</u>: Es sei $u \in C^2$ eine Lösung von (1) und $x = X(t)$ eine Lösung von (2) $\underline{\dot{X}(t) = F_p(X(t), Z(t), P(t))}$, $t \in$ Intervall), Hierbei bedeuten $Z(t) = u(X(t))$ und $P(t) = Du(X(t))$.

Z und P genügen dann den DGln

(3) $\underline{\dot{Z}(t) = F_p(X(t), Z(t), P(t)) \cdot P(t)}$

(4) $\underline{\dot{P}(t) = -F_x(X(t), Z(t), P(t)) - F_z(X(t), Z(t), P(t))\, P(t)}$ für alle die t, für die $X(t) \in G_0$ erfüllt ist.

Dieses System von GDGln für X, Z, P ($(2n+1)$ skalare Gleichungen) heißt das <u>charakteristische DGl System für (1)</u>. Jede Lösung $(X(t), Z(t))$ heißt <u>Charakteristik für (1)</u>, $X(t)$ — ihre Projektion in den Raum der x-Variablen — heißt <u>charakteristische Grundkurve</u>.

(weiter Z9/3.3) Diskussion und Verwendung der charakteristischen Gleichungen (2), (3), (4) anhand der Beispiele:

1. $x_1 u_{x_2} - x_2 u_{x_1} = u(x_1, x_2)$ $(x_1 > 0, x_2 > 0)$, $u(x_1, 0) = g(x_1)$ $(x_1 > 0)$
mit der Lösung $z = u(x_1, x_2) = g(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}) \exp(\arctan \frac{x_2}{x_1})$.

2. $u_{x_1} + u_{x_2} = u^2(x_1, x_2)$ $(x_2 > 0)$, $u(x_1, 0) = g(x_1)$ $(x_1 \in \mathbb{R})$
mit der Lösung $z = u(x_1, x_2) = \dfrac{g(x_1 - x_2)}{1 - x_2 g(x_1 - x_2)}$.

3. $u_{x_1} u_{x_2} = u$ $(x_1 > 0)$, $u(0, x_2) = x_2^2$ $(x_2 \in \mathbb{R})$
mit der Lösung $z = u(x_1, x_2) = \frac{1}{16}(x_1 + 4x_2)^2$.

3.4 Ein $(2n+1)$-Tupel reeller Zahlen $(x_0, z_0, p_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ heißt Flächenelement mit (x_0, z_0) als Trägerpunkt (und mit der "zugehörigen" Ebene $z = z_0 + p_0 \cdot (x - x_0)$). Ist $z = u(x)$ stetig diff'bar, so heißt das Flächenelement $(x_0, u(x_0), Du(x_0))$ Tangentialelement ~~der~~ Fläche $z = u(x)$ im Punkt $(x_0, u(x_0))$.
Ein Flächenelement (x_0, z_0, p_0), für das $F(x_0, z_0, p_0) = 0$ gilt, heißt Integralelement der DGL (1) $F(x, u(x), Du(x)) = 0$.
— Lösen von (1) bedeutet: Gesucht ist eine Fläche $z = u(x)$, deren Tangentialelemente Integralelemente der DGL (1) sind.

Es seien $k, n \in \mathbb{N}$, $1 \le k \le n$. Es sind gegeben

(5) $x = X(t_1, \ldots, t_k) (\in \mathbb{R}^n)$, $z = Z(t_1, \ldots, t_k) (\in \mathbb{R})$ $((t_1, \ldots, t_k) \in U \subset \mathbb{R}^k)$,
$X, Z \in C^1(U)$ mit $\operatorname{rang}(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k}) = k$ auf U.

((5) ist eine Parameterdarstellung einer k-dim Fläche im $(n+1)$-dim Raum der x-z-Variablen). Mit einer weiteren $\mathbb{R}^n$-wertigen Funktion $p = P(t_1, \ldots, t_k)$ auf U ist

(6) $(X(t_1, \ldots, t_k), Z(t_1, \ldots, t_k), P(t_1, \ldots, t_k))$, $(t_1, \ldots, t_k) \in U$

eine k-parametrige Schar von Flächenelementen.

(weiter Z 10)

Diese Schar heißt k-dim Streifen, falls die Streifenbedingungen

(7) $\quad Z_{t_j}(t_1,\dots,t_k) = P(t_1,\dots,t_k)\cdot X_{t_j}(t_1,\dots,t_k),\ (t_1,\dots,t_k)\in U$

$j=1,2,\dots,k$

erfüllt sind.

Im Fall $k=1$ ist (5) die Parameterdarstellung einer Kurve, der Trägerkurve des eindim Streifens (6) (, falls

(7) $\quad Z'(t) = P(t)X'(t)$ erfüllt ist).

Beispiele / Bemerkungen

1) Sind alle Flächenelemente (6) Tangentialelemente einer Fläche $z=u(x)$, gelten also

$Z(t_1,\dots,t_k) = u(X(t_1,\dots,t_k)),\ P(t_1,\dots,t_k) = (Du)(X(t_1,\dots,t_k))$, so liegt in (6) ein Streifen vor, ein sog. Tangentialstreifen der Fläche $z=u(x)$.

2) Lösungen $(X(t), Z(t), P(t))$ des charakteristischen DGl Systems (2), (3), (4) bilden einen eindim Streifen mit der Charakteristik $(X(t), Z(t))$ als Trägerkurve.

3) Liegt in (6) ein Streifen vor, dessen Flächenelemente sämtlich Integralelemente der DGl (1) sind, so heißt der Streifen Integralstreifen von (1). Man hat: Jeder Tangentialstreifen einer Lösungsfläche der DGl (1) ist Integralstreifen dieser DGl.