Z12 Vorlesungszusammenfassung PDGl WS2005/06 HR

(weiter 3.5 / Z11)

2. Schritt $x = X(t,s)$, $z = Z(t,s)$, $p = P(t,s)$ sind die Lösungen des folgenden AWP für das System der charakt DGln

$$X_t(t,s) = F_p(X(t,s), Z(t,s), P(t,s)), \quad X(0,s) = v(s),$$
$$Z_t(t,s) = F_p(\cdots)\cdot P(t,s), \quad Z(0,s) = g(s),$$
$$P_t(t,s) = -F_x(\cdots) - F_z(\cdots)P(t,s), \quad P(0,s) = q(s).$$

Es gilt dann (Satz 3/Z11 und 1. Schritt): (6) $F(X(t,s), Z(t,s), P(t,s)) = 0$ für (t,s) nahe bei $(0,s^0)$.

3. Schritt: Wegen (5)/Z11 lässt sich $x = X(t,s)$ lokal bei $(0,s^0)$ eindeutig nach t und s auflösen: $t = T(x)$, $s = S(x)$. Mit den oben berechneten Funktionen Z, P definiere

(7) $u(x) := Z(T(x), S(x))$, $r(x) := P(T(x), S(x))$

Wegen (6) gilt bei $x^0 := X(0,s^0) = v(s^0)$: $F(x, u(x), r(x)) = 0$.

4. Schritt u aus (7) ist Lösung des Ausgangsproblems (1), (2).

Es sind zu zeigen: $u(v(s)) = g(s)$ und $r(x) = Du(x)$ (r, u aus (7)).

Satz 5: Es sei a durch $p = q(s)$, $q: P \to \mathbb{R}^n$, $q \in C^1$ zu dem $(n-1)$-dim Integralstreifen $\mathcal{S}: (v(s), g(s), q(s))$ der DGl (1) ergänzt. Für $s \in P$ gelte $\Delta(s) := \det(F_p(v(s), g(s), q(s)), v_{s_1}(s), \dots, v_{s_{n-1}}(s)) \neq 0$. Dann gibt es in einer Umgebung von $\Gamma: x = v(s), s \in P$ ($\Gamma \subset G_0$), genau eine Integralfläche $z = u(x)$, die $\mathcal{S}$ und also a enthält.

Beispiele: 1) $u_x u_y = 1$ $(x > 0, y > 0)$, $u(x, x^3) = 2x^2$ mit einer Lösung $z = u(x,y) = 2\sqrt{xy}$.