(weitere "Beispiele" / Z12)

2) (6. Übblatt, A3) $u_x^2 + u_y^2 - e^y = 0$, $u(0,y) = 0$

mit einer Lösung $z = u(x,y) = 2e^{\frac{y}{2}} \sin\left(\frac{x}{2}\right)$.

3.6 Ergänzungen

1) Lösung des oben behandelten Cauchy Problems

$$F(x, u(x), Du(x)) = 0, \quad x \in G_0, \quad u = g \text{ auf } \Gamma$$

mit einem vollständigen Integral $z = \tilde{u}(x,a)$ $(x \in G_0 \subset \mathbb{R}^n, a \in A \subset \mathbb{R}^n)$.

1. Schritt Berechne $a = a(s)$ $(= a(s_1, \dots, s_{n-1}))$ aus

$$g(s) = \tilde{u}(v(s), a) \quad \text{und}$$

$$g_{s_j}(s) = \sum_{k=1}^{n} \tilde{u}_{x_k}(v(s), a)\,(v_k)_{s_j}(s), \quad j = 1, \dots, n-1.$$

(s hat dieselbe Bedeutung wie in Z11/Z12).

2. Schritt: Bilde die von $n-1$ Parametern $s (= (s_1, \dots, s_{n-1}))$ abhängige Lösungsschar: $z = w(x,s) := \tilde{u}(x, a(s))$.

Die Einhüllende dieser Schar ist eine Lösung des Cauchy Problems:

$$z = u(x) := w(x, \phi(x)), \quad \text{wobei}$$

$s = \phi(x)$ die Auflösung von $w_s(x,s) = 0$ nach s ist.

(siehe Z8 / 3.2)

Beispiele: 1) $u_x u_y = u$, $u(x,0) = x^2$

mit dem vollständigen Integral $\tilde{u}(x,y,a_1,a_2) = (x-a_1)(x-a_2)$.

Lösung: $z = u(x,y) = x^2 + \frac{1}{2}xy + \frac{1}{16}y^2$.

2) (Beispiele 1/Z12)

$u_x u_y = 1$, $u(x, x^3) = 2x^2$

vollständige Integrale: $\tilde{u}(x,y,a_1,a_2) = \sqrt{(2x+a_1)(2y+a_2)}$

oder $\tilde{u}(x,y,a_1,a_2) = a_1 x + \frac{1}{a_1} y + a_2$.