(weiter Z13/ 3.6 Ergänzungen/

2) (Zur Hamilton-Jacobi Theorie/

1. Der DGL (1) $\underline{F(x, u(x), Du(x)) = 0}$ mit der Funktion $F = F(x, z, p) = F(x_1, \dots, x_n, z, p_1, \dots, p_n)$ wird die DGL

$$(2) \quad \underline{G(X, DU(X)) = 0}$$

mit der Funktion $G(\underbrace{X_1, \dots, X_{n+1}}_{X}, \underbrace{P_1, \dots, P_{n+1}}_{P}) = G(X, P)$

$$:= F\left(X_1, \dots, X_{n+1}, -\frac{P_1}{P_{n+1}}, \dots, -\frac{P_n}{P_{n+1}}\right) \text{ zugeordnet.}$$

[Zum Übergang von (1) nach (2) vgl. Ü3/A4]

Es gelten:

a) Ist $z = u(x)$ eine Lösung von (1) und $U = U(X)$ eine Funktion mit $U(x, u(x)) = \text{const}$ (also etwa $U(X_1, \dots, X_{n+1}) = X_{n+1} - u(X_1, \dots, X_n) + C$), so gilt

$$G(X, DU(X)) \left(= G(X_1, \dots, X_{n+1}, U_{X_1}, \dots, U_{X_{n+1}})\right) = 0$$

b) Ist $Z = U(X)$ eine Lösung von (2), so erhält man durch $U(x, z) \; (= U(x_1, \dots, x_n, z)) = 0$ implizit eine Lösung von (1).

2. Wir behandeln Gleichungen der Form (2) (, in denen die gesuchte Funktion nicht explizit auftritt). Es wird X_{n+1} als Zeit t interpretiert und die Gleichung (2) wird als nach $U_{X_{n+1}} = u_t$ aufgelöst angenommen:
Es liegt dann vor die Gleichung

$$(3) \quad \underline{u_t + H(x, t, u_x) = 0} \quad \text{(Hamilton-Jacobi DGL)}$$

für $z = u(x, t)$ $(x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R})$ mit $H = H(x, t, p)$, $(x, t, p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Die zu (3) gehörenden charakteristischen Gleichungen reduzieren sich im wesentlichen auf

(4) $$\dot{x}(t) = H_p(x(t), t, p(t)), \quad \dot{y}(t) = -H_x(x(t), t, p(t)).$$

(4) sind die Hamiltonschen (kanonischen Bewegungs)gleichungen. Die Variablen x repräsentieren die verallgemeinerten Koordinaten, die p's die verallgemeinerten Impulse des dynamischen Systems, dessen Hamilton-Funktion H ist.

(5) Die Lösungen der Hamiltonschen Gleichungen (4) liefern die Charakteristiken der Hamilton-Jacobi Gleichung (3).

3. (Umkehrung von (5))

Satz 6 (Satz von Jacobi) (Ü6 / A1)

Es sei $H = H(x, t, y) \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ gegeben und $S = S(x, t, a) \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times A)$ (A offen $\subset \mathbb{R}^n$) ein vollständiges Integral mit $\det\left((S_{x_j a_k})_{j,k=1,\dots,n} \right) \neq 0$

auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times A$ für die Gleichung

(3) $$u_t + H(x, t, u_x) = 0.$$

Es sei $b \in \mathbb{R}^n$ beliebig und $x = X(t; a, b)$ durch

$$S_a(X(t; a, b), t, a) = -b$$

und $y = Y(t; a, b)$ durch $Y(t; a, b) := S_x(X(t; a, b), t, a)$

definiert. $x = X(t; a, b)$, $y = Y(t; a, b)$ lösen dann die zugehörigen Hamilton-Gleichungen: $\dot{x} = H_y(x, t, y)$, $\dot{y} = -H_x(x, t, y)$.

Beispiele siehe: [3], [8] oder Hildebrandt: Analysis II (Springer)