Kap IV Gleichungen höherer Ordnung. Charakteristiken. Normalformen. Typeneinteilung.

1) a, b, c, d seien C^1-Fktn in einem Gebiet G des $\mathbb{R}^5$. $G_0 \subseteq \mathbb{R}^2$ und $u \in C^2(G_0)$ seien so, dass $\underbrace{(x, y, u(x,y), u_x(x,y), u_y(x,y))}_{(\cdots)}$ für $(x,y) \in G_0$ in G liegen. Für u gelte

$$Lu(x,y) = a(\cdots)u_{xx}(x,y) + 2b(\cdots)u_{xy} + c(\cdots)u_{yy}(x,y) = d(\cdots), \quad (x,y) \in G_0.$$

Wir nennen u dann Lösung der Gleichung $Lu = d$.

$x = f(s),\ y = g(s)\ (\in C^1(J))$ sei eine glatte Parameterdarstellung der Kurve $\gamma \subset G_0$ $(f'^2(s) + g'^2(s) \neq 0)$.

Cauchy Problem mit den Daten $h, \phi, \psi \in C^k(J)$ (k genügend groß)

gesucht ist eine Lösung von $Lu = d$, die in einer Umgebung von γ definiert ist und auf γ

(1) $\quad u = h(s),\ u_x = \phi(s),\ u_y = \psi(s) \quad (s \in J)$

erfüllt.

$\to$ h, ϕ, ψ müssen die Verträglichkeitsbedingung

(2) $\quad h'(s) = \phi(s) f'(s) + \psi(s) g'(s)$ erfüllen.

Alternativ kann das Cauchy Problem auch so formuliert werden: Für h und $f \in C^k(J)$ ist eine Lösung von $Lu = d$ mit

(3) $\quad u|_\gamma = h(s)$ und $D_n u|_\gamma = f(s)\ (s \in J)$ (Normalenableitung)

gesucht.

Die Kurve γ heißt für L und die Lösung u nichtcharakterist., falls sich aus den Daten (1) $u_{xx}|_\gamma, u_{xy}|_\gamma, u_{yy}|_\gamma$ eindeutig berechnen lassen. Das geht dann, wenn

(4) $\quad \Delta(s) := a g'(s)^2 - 2b f'(s) g'(s) + c f'(s)^2 \neq 0,\ s \in J$, erfüllt ist.

(noch Z 15)

(Die Argumente von a, b, c hier lauten: $(f(s), g(s), u(f(s), g(s)), u_x(\dots), u_y(\dots))$).

Gilt $\Delta(s) = 0$, $s \in J$, so heißt γ Charakteristik für L und u.
Die Gleichungen für u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} sind dann i.a. widersprüchlich: das Cauchy Problem mit einer Charakteristik γ ist i.a. nicht lösbar.

Mit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ und $n = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g'(s) \\ f'(s) \end{pmatrix}$ kann

$\Delta(s) = 0$ auch so geschrieben werden:

$\underline{n^T A n = 0}$: Eine glatte Kurve, deren Normalenvektor n dieser Gleichung genügt, ist eine Charakteristik.

$\rightarrow$ Eine Kurve $\lambda(x,y) = c$ ist Charakteristik, falls
$\underline{(\nabla\lambda)^T A (\nabla\lambda) = 0}$ gilt.

$\rightarrow$ $y = y(x)$ oder $x = x(y)$ ist Charakteristik, falls
$\underline{a y'(x)^2 - 2b y'(x) + c = 0}$ bzw $\underline{c x'(y)^2 - 2b x'(y) + a = 0}$
erfüllt sind.

Dies sind gewöhnliche Dgln für γ, vorausgesetzt a, b, c sind bekannte Funktionen von x, y. Dies ist der Fall, wenn entweder eine feste Lösung der Dgl $Lu = d$ betrachtet wird oder wenn die Gleichung linear ist: $a = a(x,y)$, $b = b(x,y)$, $c = c(x,y)$, $d = D(x,y)u_x + E(x,y)u_y + F(x,y)u + G(x,y)$.

---

weiter mit der Literaturliste (Z3/Z7)

[12] Lieberstein — Theory of PDE — Academic Press 1972

[13] Chester — Techniques in PDEs — McGraw-Hill 1971

[14] Smirnow — Lehrgang der Höheren Mathematik Teil II — VEB 1955; Teil IV — VEB 1958

[15] Zachmanoglou, Thoe — Introduction to PDE with Applications — 1976

[16] Petrovsky — Lectures on PDEs — Interscience Publ. 1954

(weiter von Z15)

Die Gleichung $Lu = d$ heißt im Punkt (x,y)

elliptisch / hyperbolisch / parabolisch je nachdem, ob dort

$ac - b^2 > 0 \quad / < 0 \quad / = 0$ ist.

Ist die Gleichung in einem Gebiet hyperbolisch / parabolisch / elliptisch, so gibt es durch jeden Punkt des Gebietes zwei / eine / keine (reelle) Charakteristik(en).

Beispiele

$Lu = u_{xx} - u_{yy}$ ist überall hyperbolisch. Charakteristiken $y = \pm x + \text{Const}$

$Lu = u_{xx} - u_y$ ist überall parabolisch. Charakteristiken $y(x) = \text{Const}$

$Lu = u_{xx} + u_{yy}$ ist überall elliptisch.

$Lu = u_{yy} - y u_{xx}$ (Tricomi Gleichung) ist vom gemischten Typ:

L ist für $y > 0$ hyperbolisch mit den Charakteristiken $3x \pm 2y^{3/2} = \text{Const}$,

für $y = 0$ parabolisch und für $y < 0$ elliptisch.

---

21 Lineare Gleichungen zweiter Ordnung, n unabhängige Variable

$$Lu = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x)\, u_{x_j x_k} + \text{Terme mit höchstens Ableitungen erster Ordnung}$$

$$A(x) = (a_{jk}(x))_{j,k=1,\dots,n} = A(x)^T \quad , \quad u \in C^2(G), G \in \mathbb{R}^n$$

(Ist $A(x)$ nicht symmetrisch, so ersetze $A(x)$ durch die symmetrische Matrix $\frac{1}{2}(A(x) + A(x)^T)$. Dadurch wird Lu nicht verändert.)

Es sei τ die Anzahl der negativen Eigenwerte und ϑ die Vielfachheit des Eigenwertes 0. Hiermit wird definiert: L heißt in $x \in G$

elliptisch, wenn $\vartheta = 0, \tau = 0$ oder $\vartheta = 0, \tau = n$

$\left(\Delta_n u = \sum_{j=1}^{n} u_{x_j x_j} : \vartheta = 0, \tau = 0\right)$

(weiter Z 16)

<u>hyperbolisch</u>, wenn $\vartheta = 0, \tau = 1$ oder $\vartheta = 0, \tau = n-1$

($u_{x_n x_n} - \Delta_{n-1} u = Lu$: $\tau = n-1, \vartheta = 0$)

<u>parabolisch</u>, $0 < \vartheta < n$ ($u_{x_n} - \Delta_{n-1} u = Lu$: $\vartheta = 1$)

Die Hyperfläche $\phi(x) = 0$ heißt <u>charakteristisch</u> für L, falls $\nabla\phi(x) \neq 0$ und $\nabla\phi(x)^T A(x) \nabla\phi(x) = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x)\phi_{x_j}\phi_{x_k} = 0$ gelten.

---

3) <u>Zu linearen DGl der Ordnung $k \geq 1$ in n unabhängigen Variablen</u>

$$Lu = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x), \quad x \in G \subset \mathbb{R}^n$$

mit Multiindexschreibweise (vgl [1], [2], [5]):

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ ($\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$), $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}\cdots\xi_n^{\alpha_n}$,

$|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$, $D^\alpha := \partial_{x_1}^{\alpha_1}\partial_{x_2}^{\alpha_2}\cdots\partial_{x_n}^{\alpha_n}$,

$x \in G$ und L wird <u>die charakteristische Form</u> (ein Polynom in $\xi \in \mathbb{R}^n$) zugeordnet: $\sigma_x(L, \xi) := \sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(x)\xi^\alpha$ zugeordnet.

(Für $k = 2$ ist das die quadratische Form $\xi^T A(x) \xi$)

Def: 1) $\xi \in \mathbb{R}^n$ heißt <u>charakteristisch für L in x</u>, wenn $\sigma_x(L, \xi) = 0$ gilt.

2) $\mathrm{char}_x(L) := \{\xi \in \mathbb{R}^n / \sigma_x(L, \xi) = 0\}$ heißt <u>die char. Mannigfaltigkeit von L in x.</u>

3) Die Hyperfläche $S: \phi(x) = 0$ ($\phi \in C^1$, $\nabla\phi(x) \neq 0$) heißt <u>charakteristisch für L</u>, falls $\nabla\phi(x) \in \mathrm{char}_x(L)$.

S heißt <u>nicht charakteristisch</u>, wenn S in keinem Punkt charakteristisch ist.