(weiter von Z16)

(Def.) 4) L heißt in $x \in G$ <u>elliptisch</u>, wenn $\operatorname{char}_x(L) = \{0\}$ gilt.

<u>Beispiel</u>: $L = \partial_x + i\partial_y$ ist elliptisch in $\mathbb{R}^2$.

---

4) <u>Normalformen für fastlineare Dgln 2. Ordnung in $\mathbb{R}^2$</u>

(1) $Lu := a(x,y)\,u_{xx} + 2b(x,y)\,u_{xy} + c(x,y)\,u_{yy} + h(x,y,u,u_x,u_y) = 0, \quad (x,y) \in G \subseteq \mathbb{R}^2$

$a, b, c \in C^1(G)$, $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ in G, $u \in C^2$, $A(x,y) = \begin{pmatrix} a(x,y) & b(x,y) \\ b(x,y) & c(x,y) \end{pmatrix}$,

$Q(r,s) := r^T A(x,y)\, s = a r_1 s_1 + b(r_1 s_2 + r_2 s_1) + c r_2 s_2$, $r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}, s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Gesucht ist eine Koordinatentransformation

$$\begin{array}{ccc} (x,y) & \to & (\xi,\eta) := (f(x,y), g(x,y)) \\ G & \to & G' \end{array}, \quad f,g \in C^1, \; f_x g_y - f_y g_x \neq 0$$

mit der Umkehrung: $\underset{G'}{(\xi,\eta)} \longrightarrow \underset{G}{(x,y)} := (\varphi(\xi,\eta), \psi(\xi,\eta))$, $\varphi, \psi \in C^1$,

so dass Lu möglichst einfach wird.

Hierdurch wird einer Funktion $H = H(x,y)$ die Funktion $\tilde{H}(\xi,\eta) := H(\varphi(\xi,\eta), \psi(\xi,\eta))$ zugeordnet. $Lu(x,y) = 0$, $(x,y) \in G$ geht über in

(2) $\tilde{L}\tilde{u}(\xi,\eta) = \alpha(\xi,\eta)\tilde{u}_{\xi\xi} + 2\beta(\xi,\eta)\tilde{u}_{\xi\eta} + \gamma(\xi,\eta)\tilde{u}_{\eta\eta} + \lambda(\xi,\eta,\tilde{u},\tilde{u}_\xi,\tilde{u}_\eta) = 0$

mit

(3) $\underline{\alpha(\xi,\eta) = Q(\nabla f, \nabla f), \; \beta(\xi,\eta) = Q(\nabla g, \nabla f), \; \gamma(\xi,\eta) = Q(\nabla g, \nabla g)}$.

Es gilt

(4) $\underline{\alpha\gamma - \beta^2 = (ac - b^2)(f_x g_y - f_y g_x)^2}$

1. <u>Hyperbolischer Fall</u> $d := ac - b^2 < 0$, $(x,y) \in G$.

Hat man $a = c = 0$, so liegt L in Normalform vor.

(5) Ist $a \neq 0$: $a\,Q(r,r) = (a r_1 + r_2(b + \sqrt{-d}))(a r_1 + r_2(b - \sqrt{-d}))$,

(6) Ist $c \neq 0$: $c\,Q(r,r) = (c r_2 + r_1(b + \sqrt{-d}))(c r_2 + r_1(b - \sqrt{-d}))$.

($a \neq 0$) Berechne f und g als nichttriviale Lösungen ($\nabla f \neq 0$, $\nabla g \neq 0$) von $a f_x + f_y(b + \sqrt{-d}) = 0$ und $a g_x + g_y(b - \sqrt{-d}) = 0$ (aus (5))

Es gelten dann $\alpha = \gamma = 0$, $f_x g_y - f_y g_x \neq 0$, $\beta \neq 0$.

(weiter Z171)

Man erhält eine hyperbolische Normalform in $\frac{1}{2\beta}\tilde{L}\tilde{u} = \tilde{u}_{\xi\eta} + \cdots$

Der Übergang $(\xi,\eta) \to (x',y') := (\xi+\eta, \xi-\eta)$ (Drehung des (ξ,η)-Systems)

transformiert dies in die folgende Normalform: $\tilde{\tilde{u}}_{x'x'} - \tilde{\tilde{u}}_{y'y'} + \cdots$

(der Hauptteil ist der Wellenoperator).

2. Parabolischer Fall $\quad d := ac - b^2 = 0$.

Ist $a=0$, so folgt $b=0$ (ist $c=0$, so folgt $b=0$), und die DGL liegt schon in Normalform vor.

Es gelten also: $a \neq 0$ und $c \neq 0$.

(Gemäß (IV)) berechne $\xi = f(x,y)$ aus $af_x + bf_y = 0$ mit $\nabla f \neq 0$

und setze $\eta = g(x,y) = x$.

Die Wahl von f gibt $\alpha = 0$, aus (*) folgt $\beta = 0$. $g(x,y) = x$

gewährleistet $\gamma \neq 0$. Es gilt $f_x g_y - f_y g_x \neq 0$.

Lu geht über in die parabolische Normalform:

$$\frac{1}{\gamma}\tilde{L}\tilde{u} = \tilde{u}_{\eta\eta} + \cdots.$$

---

weiter mit der Literaturliste

[17]	Wladimirow	Gleichungen der math Physik	VEB 1972
[18]	Triebel	Höhere Analysis	VEB 1972
[19]	Tychonoff/ Samarski	Differentialgleichungen der mathem. Physik	VEB 1959
[20]	Sobolev	Partial DE of Mathematical Physics	Dover Publ. 1989

(weiter Z17/4))

3. <u>Elliptischer Fall</u> $d = ac - b^2 > 0$

f und g werden so berechnet, dass

$\alpha = \gamma \neq 0$, $\beta = 0$ und $f_x g_y - f_y g_x \neq 0$ erfüllt sind.

Diese Forderungen ergeben für f und g das folgende Dgl.system:

$$f_x = \frac{b g_x + c g_y}{\sqrt{d}} \qquad f_y = -\frac{a g_x + b g_y}{\sqrt{d}} .$$

Die <u>elliptische Normalform</u> lautet: $\frac{1}{\alpha}\tilde{L}\tilde{u} = \tilde{u}_{\xi\xi} + \tilde{u}_{\eta\eta} + \dots$

---

5) Ein Randwert-/Anfangswert-/Anfangswert-Randwert-Problem heißt <u>wohldefiniert</u> (im Sinne von Hadamard), falls

1. es lösbar ist (<u>Existenz</u>)
2. es höchstens eine Lösung gibt (<u>Eindeutigkeit</u>)
3. die Lösung von den Daten stetig abhängt (<u>stetige Abhängigkeit von Nebenbedingungen</u>)

<u>Beispiele</u>: 1. Das Problem $u_{xy} = 0$ in $G = [0,1]\times[0,1]$ mit Vorgaben von u auf ∂G ist i.a. <u>nicht lösbar</u>; es ist überbestimmt.

2. Das Problem $u_{xx} + u_{yy} = 0$ in $\{(x,y) \mid y > 0\}$ mit $u(x,0) = 0$, $u_y(x,0) = \varphi(x)$, ist nicht wohldefiniert: die Forderung 3. ist nicht erfüllt: Nenne u_n die Lösung mit $\varphi(x) = \frac{1}{n}\sin nx$, bilde $n \to \infty$ und vergleiche mit der Lösung zu $\varphi(x) = 0$.

6) <u>Satz</u> (Schwaches Maximumprinzip für die Laplace-Gleichung)

$G \subseteq \mathbb{R}^n$ sei ein Gebiet. Für $u \in C^2(G) \cap C^0(\bar{G})$ gelte

$$\Delta_n u(x) \geq 0 , \quad x \in G .$$

Dann gilt: $\underbrace{\max\{u(x) \mid x \in \bar{G}\}}_{\max_{\bar{G}} u} = \underbrace{\max\{u(x) \mid x \in \partial G\}}_{\max_{\partial G} u}$.

(noch 2.18)

<u>Folgerung 1</u>: Aus $u \in C^2(G) \cap C^0(\overline{G})$ und $\Delta_n u(x) \le 0$, $x \in G$,

folgt $$\min_{\overline{G}} u = \min_{\partial G} u.$$

<u>Folgerung 2</u>: Aus $\Delta_n u(x) = 0$, $x \in G$, und $u \in C^2(G) \cap C^0(\overline{G})$

folgt: $$\max_{\overline{G}} |u| = \max_{\partial G} |u|.$$

<u>Folgerung 3</u>: Das Dirichlet Problem für die Laplace Gleichung:

"Gesucht ist $u \in C^2(G) \cap C^0(\overline{G})$ mit

$$\Delta_n u(x) = f(x),\ x \in G$$
$$u(x) = \varphi(x),\ x \in \partial G \text{"} \qquad (f, \varphi \in C^0)$$

besitzt höchstens eine Lösung.

(" $u \in C^2(G) \cap C^0(\overline{G})$ ist eindeutig durch die Werte Δu in G und u auf ∂G bestimmt")