Das äußere Maß auf $\mathbb{R}$

Peer Christian Kunstmann
Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Englerstr. 2, 76131 Karlsruhe
e-mail: peer.kunstmann@kit.edu

Wir überdecken beliebige Teilmengen A von $\mathbb{R}$ durch Folgen von beschränkten Intervallen und definieren so das äußere Maß von A.

1. Definition: Für ein beschränktes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit Endpunkten a (links) und b (rechts) definieren wir die *Länge* von I durch $|I| := b - a$. Für unbeschränkte Intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ definieren wir $|I| := \infty$.

2. Definition: Für jede Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ definieren wir das *äußere Maß* $m^*(A)$ durch

$$m^*(A) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |I_j| : (I_j)_{j\in\mathbb{N}} \text{ ist Folge von offenen Intervallen mit } A \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} I_j \right\}$$

Eine Menge $N \subseteq \mathbb{R}$ heißt *Nullmenge*, wenn $m^*(N) = 0$ ist.

Beachte dabei, dass es stets eine Folge (I_j) offener Intervalle gibt mit $A \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} I_j$.

3. Beispiele für Nullmengen: (a) Endliche Mengen sind Nullmengen.

(b) Abzählbare Teilmengen sind Nullmengen: Ist $A = \{x_j : j \in \mathbb{N}\}$ und $\varepsilon > 0$, so wähle zu jedem $j \in \mathbb{N}$ ein I_j mit $x_j \in I_j$ und $|I_j| \leq \varepsilon 2^{-j}$. Dann gilt $A \subseteq \bigcup_j I_j$ und

$$\sum_{j=1}^{\infty} |I_j| \leq \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} 2^j = \varepsilon.$$

(c) Es gibt überabzählbare Nullmengen, z.B. die *Cantormenge* C, die man wie folgt erhält: Setze $C_0 := [0,1]$. C_1 entstehe aus C_0 durch Entfernung des offenen mittleren Drittels $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. C_2 entstehe aus C_1 durch Entfernen des mitteleren Drittels aus jedem verbliebenen Teilintervall, und ebenso entstehe C_{n+1} aus C_n für jedes $n \geq 2$. Man erhält eine Folge $C_0 \supseteq C_1 \supseteq C_2 \supseteq \ldots$ und setzt $C := \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} C_n$.

C ist eine Nullmenge, denn man kann C_1 durch zwei offene Intervalle mit Länge $a > \frac{1}{3}$ überdecken, man kann C_2 durch vier offene Intervalle mit Länge $\frac{a}{3}$ überdecken, man kann C_3 durch 2^3 offene Intervalle mit Länge $\frac{a}{3^2}$ überdecken etc. Allgemein kann man C_n durch 2^n offene Intervalle der Länge $\frac{a}{3^{n-1}}$ überdecken. Jede dieser Überdeckungen ist auch eine Überdeckung von C. Somit gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$m^*(C) \leq \frac{2^n a}{3^{n-1}} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty).$$

Schließlich ist C überabzählbar, denn

$$C = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} : a_n \in \{0, 2\} \text{ für jedes } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Man sieht hier schon, dass es praktisch wäre, auch abgeschlossene Intervalle zur Überdeckung zulassen zu können. Das geht auch (siehe Satz 5 unten).

4. Satz: Die Abbildung $m^* : \mathfrak{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ hat folgende Eigenschaften:

(i) $m^*(\emptyset) = 0$.

(ii) Wenn $A \subseteq B$, dann $m^*(A) \leq m^*(B)$ (*Monotonie*).

(iii) Ist $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $A \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$, so gilt

$$m^*(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A_k). \qquad (\sigma\text{-}Subadditivit\ddot{a}t).$$

Beweis. (i) ist klar nach 3. (ii) gilt, da jede Überdeckung von B auch eine von A ist.

zu (iii): Sei $\varepsilon > 0$. Wähle zu jedem k eine Folge $(I_j^{(k)})_{j \in \mathbb{N}}$ mit $A_k \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j^{(k)}$ und

$$m^*(A_k) + \varepsilon 2^{-k} \geq \sum_{j=1}^{\infty} |I_j^{(k)}|.$$

Dann gilt

$$A \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \subseteq \bigcup_{j,k \in \mathbb{N}} I_j^{(k)}$$

und also

$$m^*(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |I_j^{(k)}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A_k) + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A_k) + \varepsilon.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Ähnlich ist die Argumentation im Beweis des folgenden Satzes.

5. Satz: Für jede Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ gilt

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |I_j| : (I_j)_{j\in\mathbb{N}} \text{ ist Folge von beliebigen Intervallen mit } A \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} I_j \right\}.$$

Beweis. "$\geq$" ist klar. Für den Beweis von "$\leq$" sei $\varepsilon > 0$ und $(I_j)_j$ eine Folge von Intervallen, die A überdecken. Wähle zu jedem $j \in \mathbb{N}$ ein offenes Intervall $J_j \supseteq I_j$ mit $|J_j| \leq |I_j| + \varepsilon 2^{-j}$. Dann gilt

$$\sum_{j=1}^{\infty} |J_j| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |I_j| + \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} = \sum_{j=1}^{\infty} |I_j| + \varepsilon.$$

Bezeichnen wir das Infimum in der Behauptung mit μ, so haben wir also

$$m^*(A) \leq \mu + \varepsilon.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Man kann genauso einsehen, dass man äquivalent etwa nur abgeschlossene Intervalle (oder nur rechts halboffene bzw. nur links halboffene Intervalle) in der Definition des äußeren Maßes verwenden kann.

Jetzt Section 7 aus

C. Knapp, C.E. Silva: The uncountability of the unit interval, arXiv:1209.5119 [math.HO], 2012.

und als Folgerung: $m^*(I) = |I|$ für jedes Intervall.