Das äußere Maß

Handout zum 2. Vortrag

Michael Crocoll

30. April 2018

Definition 1 (Länge eines Intervalls). *(Siehe [Kun18, Def. 1].)*
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall mit Grenzen a und b, wobei $a \leqslant b$.
*Wir definieren die **Länge von I** mit **|I|** durch*

$$|I| := b - a$$

*Für den Fall **I unbeschränkt** setzen wir*

$$|I| := \infty.$$

Definition 2 (Das äußere Maß). *(Siehe [Kun18, Def. 2].)*
*Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ beliebig, so definieren wir das **äußere Maß** von A mit **m*(A)** durch*

$$m^*(A) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |I_j| : (I_j)_{j\in\mathbb{N}} \text{ ist Folge } \textbf{offener} \text{ Intervalle mit } A \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} I_j \right\}.$$

*Ist $\boldsymbol{m^*(A) = 0}$, so heißt A **Nullmenge**.*

Lemma 3 (Nullmengen). *(Vgl. [Kun18, Bsp. 3].)*
Ist A höchstens abzählbar, so ist A eine Nullmenge.
Beachte: Die Rückrichtung ist i.A. falsch! (siehe Cantormenge).

Satz 4 (Eigenschaften von $m^* : \mathfrak{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, \infty]$). *(Siehe [Kun18, Satz 4].)*
Es gilt

(i) $m^*(\emptyset) = 0$,

(ii) $A \subseteq B \Longrightarrow m^*(A) \leqslant m^*(B)$ *(Monotonie),*

(iii) *ist* $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Folge mit* $A \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$, *so folgt*

$$m^*(A) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A_k) \ (\sigma - \textit{Subadditivität}).$$

Proseminar 2018: Analysis. Dozent PD Dr. Peer Kunstmann, Betreuer Leonid Chaichenets.

Satz 5 (Folgen beliebiger Intervalle). *(Siehe [Kun18, Satz 5].)*
Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ beliebig, so gilt

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |I_j| : (I_j)_{j \in \mathbb{N}} \textit{ ist Folge } \textbf{\textit{beliebiger}} \textit{ Intervalle mit } A \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j \right\}.$$

Satz 6 (Das äußere Maß eines Intervalls ist seine Länge). *(Vgl. [KS12, Lemma 7.2].)*
Sei I ein beliebiges Intervall, so gilt

$$m^*(I) = |I|.$$

Zur Erinnerung

Satz 7 (Überdeckungssatz von Heine-Borel). *(Siehe [Sch05b, Satz 2.3(3)].)*
$A \subseteq \mathbb{R}^n$ sei abgeschlossen und beschränkt.
Ist $(G_\lambda)_{\lambda \in M}$ eine Familie offener Mengen mit $A \subseteq \bigcup_{\lambda \in M} G_\lambda$, dann existieren

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in M : A \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} G_{\lambda_j}.$$

Satz 8 (Riemannscher Umordnungssatz). *(Siehe [Sch05a, Satz 13.1(2)].)*
Sei (b_n) eine Umordnung von (a_n).
*Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **absolut** konvergent, dann gilt $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ist **absolut** konvergent und*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Literatur

[KS12] Knapp, Christina and Cesar E. Silva: *The Uncountability of the Unit Interval.* arXiv:1209.5119 [math.HO], 2012. `https://arxiv.org/abs/1209.5119`.

[Kun18] Kunstmann, Peer Christian: *Das äußere Maß auf* $\mathbb{R}$. `http://www.math.kit.edu/iana1/lehre/prosemkunstmann2018s/media/02__auesseres_mass.pdf`, unveröffentlichtes Typoskript, 2018.

[Sch05a] Schmoeger, Christoph: *Analysis I.* `http://mitschriebwiki.nomeata.de/Ana1.pdf`, Vorlesungsmitschrieb, 2005.

[Sch05b] Schmoeger, Christoph: *Analysis II.* `http://mitschriebwiki.nomeata.de/SS10/Ana2Bachelor.pdf`, Vorlesungsmitschrieb, 2005.