Monotone Funktionen und der Überdeckungssatz von Vitali

Handout zum 3. Vortrag

Leonid Chaichenets

14. Mai 2018

Monotone Funktionen

Definition 1 (Monotone Funktionen)**.** *(Siehe [Nat81, VIII.§1].) Sei $I = [a, b]$ mit $a < b$ und $f : I \to \mathbb{R}$. Dann heißt f* (monoton) wachsend*, falls*

$$x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \tag{1}$$

für jedes $x, y \in I$ gilt. Gilt in (1) *immer die strenge Ungleichung, so heißt f* streng *(monoton) wachsend.*

Notation. *Falls der unten stehende rechte bzw. linke Grenzwert existiert, setze*

$$f(x+) := \lim_{y \to x+} f(y), \qquad bzw. \qquad f(x-) := \lim_{y \to x-} f(y).$$

Definition 2 (Sprünge)**.** *(Vgl. [Nat81, Abschnitt VIII.§1].) Sei $I = [a, b]$ mit $a < b$ und $f : I \to \mathbb{R}$ wachsend. Für $x \in [a, b)$ bzw. $y \in (a, b]$ definiere den*

$f(x+) - f(x)$ rechten *Sprung von f in x bzw.* $f(y) - f(y-)$ linken *Sprung von f in y.*

Für $x \in (a, b)$ heiße ihre Summe $f(x+) - f(x-)$ der Sprung *von f in x. Für $x \in \{a, b\}$ sei der Sprung von f in x der rechte bzw. der linke Sprung von f in x.*

Lemma 3. *(Siehe [Nat81, Hilfssatz in VIII.§1].) Sei $I = [a, b]$ mit $a < b$, $f : I \to \mathbb{R}$ wachsend und $a =: x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} := b$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt*

$$[f(a+) - f(a)] + \sum_{k=1}^{n} [f(x_k+) - f(x_k-)] + [f(b) - f(b-)] \leq f(b) - f(a). \tag{2}$$

Korollar 4. *(Siehe [Nat81, Folgerung in VIII.§1].) Sei $I = [a, b]$ mit $a < b$, $f : I \to \mathbb{R}$ wachsend und $\sigma > 0$. Dann gibt es nur endlich viele Stellen $x \in I$ so, dass der Sprung von f in x größer als σ ausfällt.*

[*] Proseminar SS 2018: Analysis. Dozent PD Dr. Peer Kunstmann.

Satz 5. *(Siehe [Nat81, Satz VIII.§1.1].) Sei $I = [a, b]$ mit $a < b$ und $f : I \to \mathbb{R}$ wachsend. Dann gibt es höchstens abzählbar viele Stellen in denen f unstetig ist. Seien $x_1, x_2, \ldots \in (a, b)$ genau die Unstetigskeitsstellen von f im Inneren von I. Es gilt*

$$[f(a+) - f(a)] + \sum_{k=1}^{\infty} [f(x_k+) - f(x_k-)] + [f(b) - f(b-)] \leq f(b) - f(a). \tag{3}$$

Definition 6 (Sprungfunktion)**.** *In der Situation des Satzes 5 definiere die Sprungfunktion $s(f) : I \to \mathbb{R}$ von f durch $s(f)(a) := 0$ und*

$$s(f)(x) := [f(a+) - f(a)] + \sum_{x_k < x} [f(x_k+) - f(x_k-)] + [f(x) - f(x-)] \leq f(b) - f(a). \tag{4}$$

Satz 7. *(Siehe [Nat81, Satz VIII.§1.2].) Sei $I = [a, b]$ mit $a < b$ und $f : I \to \mathbb{R}$ wachsend. Dann ist $\varphi := f - s(f)$ stetig und wachsend.*

Überdeckungssatz von Vitali

Das äußere Maß m^* auf $\mathbb{R}$ wurde im letzten Vortrag [Cro18] eingeführt.

Lemma 8. *Sei $(I_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge von paarweise disjunkten (für alle $i, j \in \mathbb{N}$ gilt $i \neq j \Rightarrow I_j \cap I_k = \emptyset$) Intervallen. Dann gilt $m^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} |I_j|$.*

Definition 9 (Vitali-Überdeckung)**.** *(Siehe [Els11, Definition VII.4.1]) Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ und $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ eine Familie von Intervallen mit $|I| > 0$ für alle $I \in \mathcal{F}$. Gibt es zu jedem $x \in A$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein $I \in \mathcal{F}$ so, dass $x \in I$ und $|I| < \varepsilon$ gilt, dann heißt $\mathcal{F}$ eine* Vitali-Überdeckung *von A.*

Satz 10 (Überdeckungssatz von Vitali)**.** *(Siehe [Els11, Satz VII.4.2]) Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ mit $m^*(A) < \infty$, $\mathcal{F}$ eine Vitali-Überdeckung von A und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $n \in \mathbb{N}_0$* paarweise disjunkte *Intervalle $I_1, \ldots, I_n \in \mathcal{F}$ mit*

$$m^*\left(A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} I_k\right) < \varepsilon.$$

Literatur

[Cro18] Crocoll, Michael: *Das äußere Maß.* unveröffentlichtes Handout zum 2. Vortrag, 2018.

[Els11] Elstrodt, Jürgen: *Maß- und Integrationstheorie.* Springer-Lehrbuch : Grundwissen Mathematik. Springer, Berlin, Heidelberg, 7. Auflage, 2011, ISBN 978-3-642-17904-4. `https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-17905-1`.

[Nat81] Natanson, Isidor Pawlowitsch: *Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen.* Akademie-Verlag, Berlin, 5. Auflage, 1981.