Das Stieltjes Integral

Handreichung zum 6. Vortrag

Jennifer Kaiser

11. Juni 2018

Definition 1. *Seien* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *und* $\{x_k\}_{k=0}^n$ *eine Zerlegung des Intervalls* $[a, b]$,

d.h. $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$, *und* $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, ..., n$.

Sei weiter $\sigma = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)[g(x_{k+1}) - g(x_k)]$

Falls der Grenzwert $\lim\limits_{\lambda := max(x_{k+1} - x_k) \to 0} \sigma =: I$, $k = 0, \ldots, n$ *existiert,*

so heißt f *bezüglich der Funktion* g *(Stieltjes-) integrierbar, und der Grenzwert wird mit*

$(S) \int\limits_a^b f(x) dg(x) = I$ *bezeichnet.*

Bemerkung. Ein Stieltjes-Integral mit $g(x) = x$ ist ein Riemann-Integral.

Eigenschaften.

1. $\int\limits_a^b [f_1(x) + f_2(x)] dg(x) = \int\limits_a^b f_1(x) dg(x) + \int\limits_a^b f_2(x) dg(x)$

2. $\int\limits_a^b f(x) d[g_1(x) + g_2(x)] = \int\limits_a^b f(x) dg_1(x) + \int\limits_a^b f(x) dg_2(x)$

3. Sind k und l Konstante, so ist $\int\limits_a^b kf(x) dlg(x) = kl \int\limits_a^b f(x) dg(x)$

4. Existieren für $a < c < b$ die Integrale $\int\limits_a^b f(x) dg(x)$, $\int\limits_a^c f(x) dg(x)$ und $\int\limits_c^b f(x) dg(x)$, so gilt

$$\int\limits_a^b f(x) dg(x) = \int\limits_a^c f(x) dg(x) + \int\limits_c^b f(x) dg(x)$$

5. Existiert eines der Integrale $\int\limits_a^b f(x) dg(x)$ oder $\int\limits_a^b g(x) df(x)$, so existiert auch das andere, und es gilt die Gleichung:

$$\int\limits_a^b f(x) dg(x) + \int\limits_a^b g(x) df(x) = [f(x)g(x)]_a^b;$$

hier ist $[f(x)g(x)]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$

Satz 6.1 Das Integral

$$\int_a^b f(x)dg(x)$$

existiert, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

$f(x)$ ist auf $[a, b]$ stetig, $g(x)$ ist auf $[a, b]$ von endlicher Variation.

Satz 7.1 Ist $f(x)$ auf $[a, b]$ stetig und ist $g(x)$ dort von endlicher Variation, so gilt

$$\left|\int_a^b f(x)dg(x)\right| \leq M(f) \bigvee_a^b (g);$$

dabei ist $M(f) = max\,|f(x)|$

Satz 6.2 Ist die Funktion $f(x)$ ist auf $[a, b]$ stetig, während die Funktion $g(x)$ in jedem Punkt von $[a, b]$ eine R-integrierbare beschränkte Ableitung $g^{'}(x)$ besitzt, so gilt

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x) = (R)\int_a^b f(x)g^{'}(x)dx$$

Satz 6.3 Sei $f(x)$ stetig auf $[a, b]$. Die Funktion $g(x)$ sei konstant auf jedem der Intervalle

$(a, c_1), (c_1, c_2), \ldots, (c_m, b)$, wobei $a < c_1 < c_2 < \cdots < c_m < b$ gelte. Dann ist

$$\int_a^b f(x)dg(x) = f(a)[g(a+0) - g(a)] + \sum_{k=1}^{m} f(c_k)[g(c_k+0) - g(c_k-0)] + f(b)[g(b) - g(b-0)]$$

dabei ist

$$\bigvee_a^b (g) = |g(a+0) - g(a)| + \sum_{k=1}^{m}\{|g(c_k) - g(c_k-0)| + |g(c_k+0) - g(c_k)|\} + |g(b) - g(b-0)|$$

Literatur

[1] G.M. Fichtenholz, Differenzial- und Integralrechnungen 3, Frankfurt am Main, Wissenschaflicher Verlag Harri Deutsch GmbH 2011.

[2] Schmoeger Christoph: Analysis I, http://mitschriebwiki.nomeata.de/Ana1.pdf Vorlesungsmitschrieb 2005

[3] Natanson, "Theorie der Funktionen einer reelen Veränderlichen", Berlin, Akademie-Verlag, 5-te Auflage, 1981